代数系 I テスト問題

2008.07.28. 実施（吉原）

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 環 R の素イデアルと極大イデアルの定義を書け。

(2) $R = \{\ m + n\sqrt{10} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ は環になることを示せ。

(3) R のイデアル $P = (2)$ と $Q = (2, \sqrt{10})$ は素イデアルであるあるかどうか？

(4) 剰余環 R/P はどのようなものか？ 特に位数を求めよ。

(5) Q は極大イデアルであるか？

$\boxed{2}$ 3 つの環 $R,\ S,\ T$ をそれぞれ、

$$R = \mathbb{Z}[x],\quad S = \mathbb{Z}[i],\quad T = \left\{ \begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix} \mid m,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

(ただし、x は変数、$i = \sqrt{-1}$) とする。また、写像 $\varphi : R \longrightarrow S$, $\psi : S \longrightarrow T$ を

$$\varphi(f(x)) = f(i),\ \psi(m + ni) = \begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix},$$

と定義し、更に、$\phi = \psi \cdot \varphi$ とおくとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\phi(x^3 + 1)$ を求めよ。

(2) T は通常の行列の演算により環になることを示せ。

(3) 更に、T は整域になることを示せ。では体になるかどうか？

(4) ψ は環の準同型写像になることを示せ。

(5) 更に、ψ は全単射であることを証明せよ。

(6) φ の核を求めよ。

(7) 13 を S で分解せよ、つまり S の 2 つの元 $\alpha,\ \beta$ の積 (単元でない) として表せ。

(8) $\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$ を T の 2 つの行列の積として表せ。

(9) ϕ に関しての準同型定理を述べよ。