代 数 系 II 演 習 問 題

吉 原 久 夫

(1) 次のことを証明せよ。
- (a) $\mathbb{Q}$ は体となる。
- (b) $\mathbb{Z}$ は体とならない。
- (c) $\{\ a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\ \}$ は体となる。
- (d) $\{\ a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\ \}$ は体とならない。
- (e) $\mathbb{R}[x]$ は体とならない。
- (f) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ は体となる。
- (g) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n \geq 2)$ が体となる必要十分条件は n が素数であることである。
- (h) $\{\ a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\ \}$ は体とならない。
- (i) $\{\ a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\ \}$ は体となる。
- (j) 可換環 R の極大イデアル M による、剰余環 R/M は体である。

(2) 次の問いに答えよ。
- (a) $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q}$ の中間体をあげよ。
- (b) $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}$ の真の中間体はあるか？

(3) $S = \{\ x \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ とおくとき、次のことを証明せよ。
- (a) S に加法 $\dot{+}$、乗法 $\star$ をそれぞれ $x \dot{+} y = xy,\ x \star y = x^{\log y} = y^{\log x}$ で定義できることを示せ。
- (b) 上の演算により、S は体になることを示せ。
- (c) S は $\mathbb{R}$ の部分体ではない。

(4) 次のことを証明せよ。。
- (a) $\sqrt{2}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である。
- (b) 2 は $\mathbb{Q}$ 上代数的である。
- (c) $\sqrt[3]{2}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である。
- (d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である。
- (e) α $(\neq 0)$ が $\mathbb{Q}$ 上代数的なら、$1/\alpha$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的である。

(5) 次の α, β に対して，$\alpha+\beta$ と $3\alpha+2\beta$ の $\mathbb{Q}$ の上のそれぞれの最小多項式を求めよ。
- (a) $\alpha = 1, \beta = \sqrt{5}$
- (b) $\alpha = \sqrt{2}, \beta = \sqrt{3}$
- (c) $\alpha = \sqrt{-1}, \beta = \sqrt[3]{2}$

(6) 次の α, β に対して，$\alpha+\beta,\ \alpha^2+\beta$ の $\mathbb{Q}$ の上のそれぞれの最小多項式を求めよ。
- (a) $\alpha,\ \beta$ はそれぞれ $x^2+x+1=0,\ x^2+x+2=0$ の 1 根。
- (b) $\alpha,\ \beta$ はそれぞれ $x^3+x+1=0,\ x^2+x+2=0$ の 1 根。

(7) $\alpha,\ \beta$ の最小多項式をそれぞれ $m,\ n$ 次とするとき，$\alpha+\beta$ の最小多項式の次数の可能性について考察せよ。

(8) L を K の拡大体とするとき，L は K の上のベクトル空間とみなせることを証明せよ。

(9) 以下の問いに答えよ。
 (a) $1, \sqrt{2}$ は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立である。
 (b) $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立である。

(10) $\{\ 1, \sqrt{3}\ \}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{\ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\ \}$ 上 1 次独立であることを証明せよ。

(11) L は K の有限次拡大とし，M はその中間体とするとき，次のことを証明せよ。
 (a) $[L:K]$ が素数なら，$L = M$ または $M = K$ である。
 (b) $[L:K] = [M:K]$ ならば $L = M$ である。
 (c) $[L:M] = [L:K]$ ならば $M = K$ である。

(12) K を体とし L は K の拡大体とするとき，次のことを証明せよ。
 (a) α は L の拡大体の元で、K 上代数的とするとき、$[L(\alpha):L] \leqq [k(\alpha):K]$ である。
 (b) $\alpha, \beta \in L$ として、$[K(\alpha):K] = m,\ [K(\beta):K] = n$ で m と n が互いに素なら $[K(\alpha,\beta):K] = mn$ である。

(13) 整域 R が体 K を含み，ベクトル空間として R は K 上有限次元ならば，R は体であることを証明せよ。

(14) 以下の問いに答えよ。
 (a) $K_1,\ K_2$ を L の部分体とするとき、$K_1 \cap K_2$ も L の部分体である。
 (b) $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{C}$ の部分体で（包含関係で）一番小さい。

(15) 次のことを証明せよ。
 (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}$ である。
 (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$
 (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ は $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}, (a,b,c,d \in \mathbb{Q})$ の全体からなる。

(16) 次のことを証明せよ。
 (a) $a,\ b$ を 0 でない有理数とするとき、$\mathbb{Q}(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ である。
 (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$ である。
 (c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{3})$ である。

(17) L は K の拡大体で、$\alpha,\ \beta \in L$ とするとき、$K(\alpha,\beta) = K(\alpha)(\beta)$ であることを証明せよ。

(18) 下記の $f(x)$ に対して $f(x) = 0$ の１根を θ とするとき，$2/(\theta^2 - 1)$ を有理数を係数とする，次数が $f(x)$ の次数より小さい θ の多項式で表せ。
- (a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$
- (b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$
- (c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5$

(19) K, K' を体とし，$f : K \longrightarrow K'$ 体の準同型写像とするとき，次のことを証明せよ。
- (a) f は 0 写像か，単射である。
- (b) f が 0 写像でなければ，K と K' の標数は等しい。
- (c) f が 0 写像でなく，K と K' が同じ素体 K_0 を含めば，f を K_0 に制限したものは K_0 の恒等写像である。

(20) 次の問いに答えよ。
- (a) ２次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解の公式を導け.
- (b) 係数が実数の３次方程式 $f(x) = x^3 + px + q = 0$ は少なくとも１個の実根を持つことを示せ.
- (c) 因数分解 $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ を用いて (2) の方程式を解け. (hint: $x^3+(-3yz)x+(y^3+z^3)$ と変形)

(21) 次を証明せよ。
- (a) $F(x) \in \mathbb{Q}[x]$ について，$F(\sqrt{2}) = 0$ ならば，$F(x)$ は $\mathbb{Q}[x]$ において $x^2 - 2$ で割り切れることを示せ.
- (b) $x^2 - 2$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]$ で既約かどうか理由をつけて答えよ.
- (c) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ とする，もし $F(x) \in \mathbf{Q}[x]$ について，$F(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$ ならば. $F(x)$ は $\mathbb{Q}[x]$ において，$f(x)$ で割り切れることを示せ.

(22) 次の $f(x)$ の K 上の最小分解体 M を求め、$[M : K]$ を計算せよ。
- (a) $K = \mathbb{Q}$ のとき、$f(x) = x^4 - 3$.
- (b) $K = \mathbb{Q}$ のとき、$f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$.
- (c) $K = \mathbb{Q}$ のとき、$f(x) = x^8 - 1$.
- (d) $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ のとき、$f(x) = x^2 + x + 1$.

(23) 次の問に答えよ。
- (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ から $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ への $\mathbb{Q}$ の上の同型は存在しないことを証明せよ。
- (b) 整数 n に対して，$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ から $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ への $\mathbb{Q}$ の上の同型が存在するとき，n を求めよ。

(24) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})$ がなりたつ有理数 a, b の条件を求めよ。

(25) 次の問に答えよ。

(a) $Aut(K)$ を次のとき求めよ。
$K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, ただし，α は $\mathbb{Q}$ 上 2 次の既約な多項式の根。 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \omega)$, $K = \mathbb{Q}(\exp{(2\pi\sqrt{-1})}/5)$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{2})$.

(b) $Aut(L/K)$ を次のとき，求めよ　$L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}), K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

(26) 次の問に答えよ。

(a) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ と置くとき，次の問に答えよ。

(b) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$　の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f(x)$ を求めよ。

(c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$　であることを証明せよ。

(d) $\mathbb{Q}[x]\ /\ (f(x)) \cong K$　であることを証明せよ。

(e) $[K : \mathbb{Q}]$　を求めよ。

(f) $K\ /\ \mathbb{Q}$　はガロワ拡大であることを証明し，そのガロワ群を求めよ。

(g) $K\ /\ \mathbb{Q}$　の中間体をすべて求めよ。

(27) θ を $\mathbb{Q}$ 上代数的な元とするとき $\mathbb{Q}(\theta)\ /\ \mathbb{Q}$ の中間体の個数は有限であることを証明せよ。

(28) 次の各問いに答えよ。

(a) 代数拡大の定義を述べよ。また代数拡大でない例を一つかけ。

(b) 体の標数は素数であることを証明せよ。

(c) 定規とコンパスで角６０度を三等分する作図が不可能なことの理由（証明の概略）を述べよ。

(29) 次の問に答えよ。

(a) 方程式 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ のすべての根を $\mathbb{Q}$ に添加して得られる体は $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ であることを示せ.

(b) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$　の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $g(x)$ を求めよ。

(c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$　であることを証明せよ。

(d) $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 K の次元（あるいは体の拡大次数）$[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ。

(e) ガロワ群 $G = K/\mathbb{Q}$ を求めよ。特に G の単位元以外の元の位数は 2 であることを示せ.

(f) $K\ /\ \mathbb{Q}$　の中間体をすべて求めよ。