代数系 I テスト問題

2010.07.26. 実施（吉原）

$\boxed{1}$ 整数環 $R=\mathbb{Z}$ と環 $S=\mathbb{Z}/(15)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) R において、整数 m と n が互いに素なとき，$mx+ny=1$ をみたす整数 $x,\ y$ が存在することをイデアル論の立場から説明せよ。

(2) R において (5) は極大イデアルであることを示せ。また R において (15) を含むイデアルをすべて求めよ。

(3) R において、イデアルの列 $(n_1)\subset(n_2)\subset(n_3)\subset\cdots(n_k)\subset\cdots$ は、十分先に行くと一定 $(n_r)=(n_{r+1})=\cdots$ になることを証明せよ。

(4) S において、$5\mathbb{Z}/(15)$ は極大イデアルであることを示せ。

(5) S の単元をすべて求めよ。それらの集合 U は乗法に関して群をなすことを示せ。

(6) S の零因子をすべて求めよ。

(7) $1^8+2^8+3^8+4^8+\cdots+14^8$ を 15 で割った余りを求めよ。

$\boxed{2}$ α を環 $R=\mathbb{Z}[x]$ から環 $\mathbb{R}$ への写像で $f\in R$ に対して $\alpha(f)=f(\sqrt{5})$ を対応させるものであるとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) α は環の準同型写像であることを示せ。

(2) α の核を求めよ。

(3) α の像 S を求めよ。すなわちはどのような元からできているか具体的に表せ。またそれは $\mathbb{R}$ の部分環であることを示せ。

(4) R において $M=(5,x)$ は極大イデアルであることを示せ。

(5) $\alpha(M)$ は S において極大イデアルであるか？

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 整域 R において元 a が既約元であることの定義を述べよ。

(2) $R=\mathbb{Z}[x], S=\mathbb{R}[x],\ f(x)=x^4-9x^2+12$ とするとき，$f(x)$ は R と S で既約元であるかどうか調べよ。