

代数系 II 練習問題

[1] $\mathbb{Q}[x]$ から $\mathbb{R}$ への写像 φ を $\varphi(f(x)) = f(\sqrt{2})$ によって定義する。
このとき次の問いに答えよ。

- (1) φ は環の準同型写像であることを示せ。
- (2) φ の核と像を求めよ。
- (3) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ を証明せよ。

[2] 体 E の部分体 F_i , $i \in I$ に対してそれらの共通部分 $\bigcap_{i \in I} F_i$ は部分体になることを証明せよ。

[3] (1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ 上の 2 次拡大であることを示せ。また $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ と一致することも示せ。

- (2) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ。
- (3) $\sqrt[3]{2}$ は $f(x) \in \mathbb{Q}[x], \deg f = 2$ の解にはならないことを証明せよ。

[4] 2 つの相異なる素数 p, q に対して $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ は $\mathbb{Q}$ 上 4 次拡大で、 $\{1, \sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{pq}\}$ と一致することを示せ。

[5] $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 6$ の根 θ に対して $3/(\theta^2 - 1)$ を $c_0 + c_1 + c_2$, $c_i \in \mathbb{Q}$ の形に表せ。

[6] $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})$ を示せ。

[7] K の標数が 2 でなければ、 $[L : K] = 2$ であることと、 L が既約多項式 $x^2 - a \in K[x]$ の分解体をなすこと同値であることを示せ。

[8] L/F が代数拡大ならば、その任意の中間体 E に対して、 L/E , E/F はともに代数拡大であることを証明せよ。

[9] 拡大体 E/F において、 $E_0 = \{a \in E \mid a \text{ is algebraic over } F\}$ は F 上代数的な E の最大部分体であることを証明せよ。

[10] 拡大体 E/F において、 $x, y \in E$ とする。 $[F(x) : F] = m$, $[F(y) : F] = n$ で m, n が互いに素ならば、 $[F(x, y) : F] = mn$ であることを証明せよ。

[11] t が体 F 上超越的であれば、任意の正の整数 n に対して $[F(t) : F(t^n)] = n$ であることを証明せよ。

[12] $F \subset K \subset E$ で F, E は体、 K は環で E が F の有限次拡大ならば、 K も体であることを証明せよ。