代数系 II テスト

2004年2月12日(吉原)

注意：講義で学んだ定理は証明なしに用いてよい。

$\boxed{1}$ （1）高等学校で次の主張を学ぶ，”係数が実数の多項式 $f(x)$ が $a+bi, a, b \in \mathbb{R}$ を根に持ったら，$a-bi$ も根である ”

これを最小多項式を用いて証明せよ。このことから係数が実数の3次方程式は必ず実根を持つことを証明せよ。

（2）$\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = \mathbb{Q}(\omega)$ を示せ，ただし，$\omega^2+\omega+1=0$ である。

$\boxed{2}$ $\alpha = \sqrt[5]{2}$ とするとき，次の問に答えよ。

（1）$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ を求めよ。

（2）$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha)$ を証明せよ。

（3）（2）によれば $1/(1+\alpha)$ も α の整式で表される。そこで $1/(1+\alpha) = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3 + c_4\alpha^4$ をみたす有理数 $c_0, \ldots, c_4$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ K_1 と K_2 を体として、$f : K_1 \longrightarrow K_2$ を準同型写像とする。$f(1)=1$ を仮定する、このとき次の問いに答えよ。

（1）f は単射であることを示せ。

（2）K_2 は K_1 の上のベクトル空間とみなせる，どのように定義したらよいか？(概略のみでよい)

（3）$a \neq 0$ とするとき $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ であることを示せ。

（4）$K_1 = \mathbb{Q}$ のとき f としては恒等写像しかないことを示せ。

（5）$K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ かつ $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ となることが可能か？

$\boxed{4}$ （1）方程式 $f(x) = x^4 - 16x^2 + 4 = 0$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体は $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ であることを示せ.

（2）$K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$　であることを証明せよ。

（3）$[K:\mathbb{Q}]$ を求めよ。

（4）ガロワ群 $G = K/\mathbb{Q}$ を求め，群 G のすべての部分群を求めよ。

（5）$K \,/\, \mathbb{Q}$　の中間体をすべて求めよ。