

代数系 II テスト

2006年2月2日(吉原)

注意：講義で学んだ定理は証明なしに用いてよい。

- ① (1) 無理数の定義を述べよ。
(2) $\sqrt[3]{2}$ は無理数であることを証明せよ。
(3) $\sqrt[3]{2}$ は係数が整数の2次方程式の解にはならないことを証明せよ。

- ② (1) $\alpha \in \mathbb{C}$ のとき, $\mathbb{Q}(\alpha)$ の定義を述べよ。
(2) α が \mathbb{Q} 上代数的であることの定義を述べよ。
(3) α が \mathbb{Q} 上代数的のとき, $1/\alpha$ と α^2 も代数的であることを証明せよ。

- ③ (1) $\frac{1}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$ の分母を有理化せよ。
(2) $\alpha^4 + 2\alpha + 3 = 0$ のとき, $1/(\alpha^2 + \alpha + 1)$ を係数が整数の α の整式で表せ。

- ④ 方程式 $z^8 = 1$ の根で8乗して初めて1になるものを原始8乗根という。
(1) 原始8乗根の個数を求めよ。
(2) 原始8乗根 ζ のみたす \mathbb{Q} 上の最小多項式 $f(x)$ を求めよ。
(3) $f(x)$ の \mathbb{Q} 上の分解体 K を求めよ。
(4) $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ。
(4) 拡大 K/\mathbb{Q} のガロワ群を決定せよ。すなわちどのような変換から成り立っているか, と群がどのようなものかを求めよ。

- ⑤ (1) $\cos \frac{2\pi}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$
 $+ \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$
を見て, 単位の長さ1が与えられたとき, 正17角形が作図可能であることを証明せよ。
(2) 60° の3等分は定規とコンパスで作図出来ない理由の概略を200字程度で述べよ。