代 数 入 門 小テスト問 題

2011.11.29. 実施（吉原）

(1) 置換 τ を

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき、以下の問いに答えよ。

(a) τ^2 を求めよ。

(b) $\sigma^2 = \tau$ を満たす置換 σ は存在するかどうか？あればそれをすべて求めよ。

(c) $\sigma^5 = \tau$ を満たす置換 σ は存在するかどうか？あればそれをすべて求めよ。

(2) G を群、$a \in G$ とするとき、写像 $f_a : G \longrightarrow G$ を $f_a(x) = ax$ と定めるとき、次の各問いに答えよ。

(a) f_a は全射であるか？

(b) f_a は単射であるか？

(c) f_a は群の準同型写像であるか？

(3) 集合 G を

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

とするとき、次の各問いに答えよ。

(a) G は行列の積に関して、群になることを示せ。

(b) 写像 $f : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = n$$

によって定義するとき、f は同型写像であることを示せ。

(4) $G = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ において、15 と互いに素である m によって、m の剰余類 $\overline{m}$ 全体の作る部分集合を $G^\times$ するとき、以下の問いに答えよ。

(a) $G^\times$ の要素の個数を求めよ。

(b) $\overline{2}^m \overline{7}^n = \overline{11}$ を満たす自然数 $m,\ n$ を一組 (m, n) 求めよ。

(c) $G^\times$ は乗法によって群になることを示せ。

(d) $G^\times$ において $\overline{4}$ と $\overline{7}$ の位数を求めよ。

(e) $G^\times$ において $\overline{2}$ と $\overline{7}$ で生成される部分群を求めよ。

(f) $G^\times$ は巡回群であるか？