代 数 入 門 テスト問 題

2011.02.08. 実施（吉原）

(1) (a) 与えられた $\sigma \in S_n$ に対して、$\tau \in S_n$ で $\tau^2 = \sigma$ となるものが存在すれば、σ は偶置換であることを示せ。

(b) 置換
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
を互換の積に分解せよ。（一つ求めればよい）

(c) $\tau^2 = \sigma$ を満たす置換 τ は存在するかどうか？あればそれをすべて求めよ。

(2) G_1 と G_2 を群、$f : G_1 \longrightarrow G_2$ を準同型写像とするとき、次の各問いに答えよ。

(a) $Kerf$ は G_1 の正規部分群であることを示せ。

(b) $G_1/Kerf$ から G_2 への単射準同型写像を定義し、それが実際に単射準同型写像になっていることを示せ。

(c) f が全射、G_1 がアーベル群のとき、G_2 もアーベル群になるかどうか、理由を付けて答えよ。

(3) 位数 n の巡回群は加法群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と同型であることを示せ。

(4) G を群とするとき、部分集合 $H = \{\ x^2 \mid x \in G\ \}$ は G の演算で部分群になるかどうか答えよ。

(5) 集合 G を
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \middle|\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$
とするとき、次の各問いに答えよ。

(a) G は行列の積に関して、群になることを示せ。

(b) G から加法群 $\mathbb{Z}$ への同型写像を与えよ。また、それが同型写像であることを示せ。