

代数入門テスト問題

2012.02.07. 実施(吉原)

(1) 1次分数変換

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1,$$

の全体は、変換の合成を演算として、群を作ること証明せよ。

(2) G_1 と G_2 を群、 $f: G_1 \rightarrow G_2$ を準同型写像とすると、以下の問いに答えよ。

- (a) $f(e_1) = e_2, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ を示せ。ただし、 e_i ($i = 1, 2$) は G_i の単位元であり、 $x \in G_1$ である。
- (b) f の像 $f(G_1)$ は G_2 の部分群になるかどうか? 更に、正規部分群になるかどうか? 答えよ。
- (c) $\text{Ker} f$ は G_1 の正規部分群であることを示せ。

(3) 行列 a, b がある (ただし、 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ とする。)

$$a = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、次の各問いに答えよ。

- (a) a^3, b^2, bab を求めよ。また、 bab と a の関係を述べよ。
 - (b) a, b で生成された群を G とする。 G の位数を求めよ。
 - (c) G の中でそれぞれ a, b で生成された部分群は正規部分群であるかどうか?
 - (d) G は 3 次対称群 S_3 と同型であることを示せ。
- ## (4) 実数全体の集合を \mathbb{R} とし、 $S = \mathbb{R} \setminus \{-1/9\}$ とする。 S の 2 元 x, y に対して、演算 $*$ を $x * y = 9xy + x + y$ により定義する。このとき次の問いに答えよ。
- (a) $x, y \in S$ なら $x * y \in S$ を示せ。
 - (b) S は演算 $*$ により群になることを示せ。
 - (c) \mathbb{R}^\times は 0 でない実数全体からなる乗法群とすると、 S から \mathbb{R}^\times への写像 f を $f(x) = 1/(9x + 1)$ として定義すると、群の同型写像になることを示せ。
 - (d) S において方程式 $x * x * x = 111$ を解け。
 - (e) 任意の実数 $a \neq -1$ に対して方程式 $x * x * x = a$ は S に つねに 1 個の解を持つことを示せ。