代数入門（群論）演習問題

吉 原 (2010)

(1) 次の６つの関数は写像の積に関して群になることを証明せよ。
$f_1(x) = x,\ f_2(x) = 1/(1-x),\ f_3(x) = (x-1)/x,$
$f_4(x) = 1-x,\ f_5(x) = x/(x-1),\ f_6(x) = 1/x.$

(2) S を任意の集合とし，S の部分集合全部の集合を $P(S)$ とする。$P(S)$ の任意の２元 A, B に対して　$A \circ B = (A-B) \cup (B-A)$ とおく。このとき $P(S)$ は $\circ$ を演算としてアーベル群になる。

(3) $S = \mathbb{R} - \{-1\}$ として演算 $a * b = a + b + ab$ を考える，このとき次の問いに答えよ。
(a) S はこの演算で群になることを示せ。
(b) $3 * x * 4 = 10$ の解を S で求めよ。

(4) $2n$ 次の行列 J を

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$$

とおくとき，$S_p = \{\ A \in M_{2n}(\mathbb{C}) \mid AJ^tA = J\ \}$ は群になることを示せ。この群をシンプレクティク群という。

(5) (a) 3 次対称群 S_3 において $\sigma = (1, 2)$ と交換可能な元をすべて求めよ。
(b) 4 次対称群 S_4 において $\sigma = (1, 2)$ と交換可能な元をすべて求めよ。

(6) 以下の問いに答えよ。
(a) G を有限群とし、H をその部分群とする。このとき、H の位数は G の位数の約数であることを示せ。
(b) 4 次対称群 S_4 の部分群で位数が 3 以下のものをすべて求めよ。
(c) 4 次対称群 S_4 の巡回部分群で位数が 4 のものをすべて求めよ。

（2006 新潟大学大学院入試問題）

(7) 5 次の対称群を考え、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$$

とおく。このとき、以下の問いに答えよ。
(a) 次の計算をせよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) $\tau\sigma\tau^{-1} = (1\ 4\ 5)(2\ 3)$ をみたす τ を１つ求めよ。

(c) σ と共役な元の個数を求めよ。

（2006 新潟大学大学院入試問題）

(8) $f = f(x_1, x_2, x_3.x_4) = x_1 + x_2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_3x_4$ とするとき次の問いに答えよ。
(a) f を不変にする S_4 の部分集合 H を求めよ。
(b) H は S_4 の部分群になることを示せ。
(c) H は S_4 の正規部分群であるか？

(9) (a) $H = \{\ 2^m 3^n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ は 0 でない有理数全体の作る乗法群 $\mathbb{Q}^*$ の部分群になることを証明せよ。
(b) H を G の部分群とすると，$a \in G$ に対して集合 $aHa^{-1} = \{\ axa^{-1} \mid x \in H\}$ もまた G の部分群になることを証明せよ。

(10) 2 元からなる群をすべて求めよ。次に 3, 4, 5, 6 元のときもそれぞれ求めよ。

(11) $\mathbb{C}^*$ を零でない複素数全体の集合上で通常の積を考えた群とする．n を正の整数，$G = \{\ t \in \mathbb{C}^* \mid t^n = 1\}$ とするとき，以下の問に答えよ．
(a) 群が巡回群であることの定義を述べよ．
(b) G は $\mathbb{C}^*$ の部分群であることを証明せよ．
(c) G は巡回群であることを証明せよ．

（2010 東北大学大学院入試問題）

(12) 集合 G を

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ \text{and } ad - bc = 1 \right\}$$

とするとき， G は行列の乗法で群になることを証明せよ。また、 G において $(2,1)$-成分が 5 の倍数全体のなす部分集合を G_5 とするとこれは G の部分群になることを示せ。

(13) $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ は S_4 の正規部分群になることを示せ。また、V による S_4 の左剰余分解を求めよ。

(14) p を素数とする。 $\mathbb{R}$ を加法により群とみて、$\mathbb{Z}$ による剰余群を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とする。$a \in \mathbb{R}$ が代表する $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の元を $[a]$ で表す。各整数 $n \geq 0$ に対して、$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の部分集合 G_n を

$$G_n := \{\ [a] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mid [p^n a] = [0]\}$$

と定めるとき、以下の問いに答えよ。
(a) 各整数 $n \geq 0$ に対して、$G_n \subset G_{n+1}$ が成り立つことを示せ。
(b) 各整数 $n \geq 0$ に対して、G_n は位数 p^n の巡回群であることを示せ。
(c) $G := \bigcup_{n \geq 0} G_n$ は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の部分群であることを示せ。
(d) G の任意の部分群 $H (\neq G)$ に対して、$H = G_n$ を満たす整数 $n \geq 0$ が存在することを示せ。

（2009 首都大学東京大学院入試問題）

(15) アーベル群 G において、位数 m の元 a と位数 n の元 b が存在したとする。m と n が互いに素であれば、ab は位数 mn であることを証明せよ。

(16) G を群とし，H を G の部分群とする．
 (a) G の元 g_1，g_2 に対して，${g_1}^{-1}g_2 \in H$ となることと，$g_1H = g_2H$ となることは同値であることを証明せよ．
 (b) G における H の指数 $(G : H)$ が 2 ならば，任意の $g \in G$ に対し $gH = Hg$ となることを証明せよ．
 (c) $(G : H) = 2$ となるような群 G と，その部分群 H の組の例を一例挙げよ．

（2006 埼玉大学大学院入試問題）

(17) 次の各主張を証明せよ。
 (a) 3 次の対称群は巡回群でない。
 (b) 巡回群の部分群はまた巡回群である。
 (c) 位数が素数の群は巡回群である。
 (d) 単位群でない群 G が自明な部分群しかもたなければ，G は素数位数の巡回群である。
 (e) 巡回群の剰余群は巡回群である。

(18) $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とし、$\mathbb{R}^* = \{\ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ とする。

$$G = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}^*,\ y, z \in \mathbb{R}\}$$

の任意の元 $(a, b, c), (a', b', c')$ に対してそれらの積 $(a, b, c) \cdot (a', b', c')$ を

$$(a, b, c) \cdot (a', b', c') = (aa', ab' + b, ac' + c)$$

によって定義する。このとき、次の問いに答えよ。
 (a) 集合 G は上で定義された演算で群になることを示せ。
 (b) G の部分集合 $H = \{\ (1, y, z) \in G \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ は G の正規部分群であることを示せ。

（2007 新潟大学大学院入試問題）

(19) 群 G_1 から群 G_2 への準同型写像 $f : G_1 \longrightarrow G_2$ が全単射のとき、逆写像 f^{-1} も準同型写像になることを証明せよ。

(20) G_i $(i = 1, 2)$ を群として、写像 $f : G_1 \longrightarrow G_2$ を群の準同型写像とする。このとき以下の問いに答えよ。
 (a) $a \in G_1$ の位数を n とするとき、$f(a)$ の位数は n の約数であることを示せ。
 (b) (a) において f が単射なら $f(a)$ の位数は n であることを示せ。

(21) G を群として、$a \in G$ とする。$\mathbb{Z}$ を加法群として、写像 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ を $f(n) = a^n$ と定義する。このとき以下の問いに答えよ。
 (a) f は群の準同型写像であることを示せ。
 (b) G にある元 b が存在して $f(n) = b^n$ で定義される写像が全射であることと、G が巡回群であることは同値であることを示せ。

(22) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ を加法群として、自然な準同型写像 $f_{mn} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ があるとする。このとき以下の問いに答えよ。
(a) m は n の倍数であることを示せ。
(b) f_{mn} の核を求めよ。

(23) 乗法群 $\mathbb{C}^\times$ と $\mathbb{R}^\times$ は同型にならないことを示せ。

(24) G を群とし、集合 H を $H = \{ x^2 \mid x \in G \}$ と定める。このとき、以下の問いに答えよ。
(a) H が G の部分群であれば、正規部分群であることを示せ。
(b) G がアーベル群ならば H は　G の部分群であることを示せ。
(c) H が G の部分群でないような例をあげよ。

（2004 新潟大学大学院入試問題）

(25) 群 G の各元と可換な G の元の全体を G の中心といって，$Z(G)$ で表す:

$$Z(G) = \{ a \in G \mid ax = xa,\ \forall x \in G\}$$

以下の問いに答えよ。
(a) G の中心は正規部分群であることを示せ。
(b) G が有限群のとき、$G/Z(G)$ が巡回群であれば、$G/Z(G) = \{1\}$ であることを示せ。

(26) 群 G の部分集合 S に対して，

$$N_G(S) = \{ a \in G \mid aS = Sa\}$$

および

$$C_G(S) = \{ a \in G \mid as = sa,\ s \in S\}$$

はいずれも G の部分群になることを証明せよ。また，G の部分群 H に対して，$N_G(H)$ は H を正規部分群として含むような G の部分群のうち最大のものであることを示せ。

(27) 次の主張を証明せよ。
　群 G の正規部分群 N が G の中心にふくまれていて，G/N が巡回群であれば，G はアーベル群である。