1. 始めに

数学では特に正確な議論をする必要がある。そのために使う言葉の意味をはっきりと決めておく，これを**定義**という。またある主張が正しいことを示すために筋道たった説明も必要になる，これを**証明**という。証明されて得られた結果を**定理**という。

ただし定義，定理，証明などの用語に今のところこだわることはない。日常使われている程度の意味と思ってかまわない。ちなみに教科書[1]で最初に ”証明 ”という言葉が出てくるのは数学 I の p.30 の例題 1 である。次には p. 131 である。そのあと数学 A の論証のところ p. 27 など沢山ある。しかし証明とはどういうものであるかとの ”定義 ”は述べられていない。実例にあたってどういうものか学んでもらいたい。これには数学 A の平面図形の章が最適である。あるいは最後にあげた文献 [2] もいいかもしれません。

では，数と図形と無限の世界の探検に船出しよう，コロンブスが未知の世界を探検に船出したように！未知の世界にどんな不思議がまちうけているであろうか？

2. 黄金比

数学 I の教科書 P. 39 には黄金比という言葉が出ており，その意味は

定義 1. 線分を 2 つに分割し，全体と大きい部分の長さの比を，大きい部分と小さい部分の長さの比に等しくするとき，この分割を黄金分割，比の値を黄金比とよぶ。

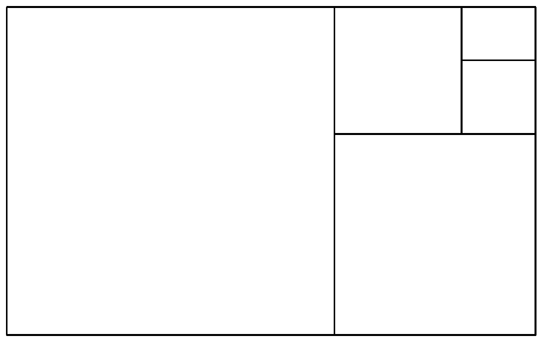
となっている。同じく P. 57 の例題 5 にも黄金分割の問題が採り上げられている。こちらでは比の値は P. 39 のものの逆数となっている。どちらを定義とするかは決まっていないようであるが，ここでは便宜上後者のものを採用する。もうすこしはっきり述べると：

線分 AB の長さを a とし AB 上に点 C を $AC = b, CB = c = a - b$ と取る。このとき条件から $a : b = b : (a - b)$ である。そこで比の値として $a/b = x$ を採用すれば方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ を得る。これより $x = (1 + \sqrt{5})/2$ であることがわかる。この値はしばしば ϕ で表される。ちなみに $b/a = 1/\phi = (\sqrt{5} - 1)/2$ である。

この黄金比（に近い値）は古来沢山の絵画，彫刻，建造物に用いられてきた。パルテノン神殿の縦横の比などがそうである。近年でも名刺，はがき，ハイヴィジョンの画面などに用いられている。美観は個人により様々であるが，確かに黄金分割は調和の取れた安定感があるように思える。それだけでなく実はこの比の中に沢山の数学的な不思議がかくされている。

[1] 以下教科書は東京書籍のものである。

(1) 辺の比が $1:\phi$ である長方形を黄金長方形という。今辺の長さがそれぞれ 1 と ϕ の黄金長方形があったとして，この黄金長方形から一辺の長さが 1 の正方形を引き去ると新しい小さな黄金長方形ができる。この長方形からさらに一辺の長さが $\phi-1$ の正方形を引き去ると，さらに小さい黄金長方形ができる。そしてまたこんどは一辺の長さ $2-\phi$ の正方形を引き去る $\cdots$ この操作は無限にくりかえすことができる。



数学の主張では，その逆を考えると興味深いことがしばしばある。上の事実の逆は次のようになる。

問題 縦の長さが 1 横の長さが x で $1<x<2$ の長方形 R_1 があり，上のように短い方の辺を一辺とする正方形 S_1 を内部に作り，R_1 から S_1 を除いた部分の長方形を R_2 とし，これの短い方の辺 $x-1$ を一辺とする正方形を S_2 とする。$\cdots$ このように次々と限りなく小さい正方形を 1 個ずつ作って行けるとしたら，それは黄金長方形に限るか？

この問題に答えるにはまだ知識が不足しているので，数列や極限を学ぶまで待とう。

(2) 数学 A の p. 28 には背理法を用いて，$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明している。ここでは，黄金比が無理数であることの図形を用いた証明を紹介しよう。その後教科書と同様の証明をしてみよう。

[証明] x が無理数であることと $y=1/x=b/a$ が無理数であることとは同値である。

（ タイム：このことをきちんと論理的に証明せよ。）

従って y が無理数であることを示す。$[\alpha]$ は α の整数部分を表す記号とする。すなわち，$[\alpha]=n$ とは $n\le\alpha<n+1$ のことである。

$[1/y]=[x]=1$ である。すると，$1-y=y^2$ になり，さらに y を y^2 で割ると $[y/y^2]=[x]=1$ つまり $y-y^2=y^3$ となる。次に y^2 を y^3 で割る，というようにこの手順を際限なく続ける $\cdots$ 。このと

きどの段階でも割られる数と割る数の比は一定である。これを図形にあてはめてみると，CC_1 を CB と等しくなるように反対側にとれば，$AB : AC = AC : CB = CC_1 : C_1A$ が成り立つ。さらに C_1C_2 を C_1A と等しい長さで反対側にとれば，C_1C は C_2 で黄金分割される。以下同じように続けられ，決して終了しない。

さて y が有理数であると仮定すると，AB と AC は同じ長さ d の整数倍になる。そして同じことが次々と成り立つ：

$C_1C = CB = AB - AC,\ C_1C_2 = AC_1 = AC - C_1C,\ \ldots$

すなわち，d の正の整数倍からなる減少する無限の列が作れることなり，これは矛盾である。□

(3) 2つの有理数に四則演算をした結果はまた有理数である。すなわち有理数全体からなる集合は，その中の2つの要素に四則演算をしてもまたその集合の中の要素になる，このような集合を ”体 ”(たい) という。(ただし，0 で割ることは除く)

問 1. 無理数全体の集合は体になるか？実数の集合は体になるか？

一つ一つの数を考えることよりも，数の集合を考えその集合での演算に注目することが大切なことがある。例えば次のように利用される。

(4) 上のことから $\sqrt{5}$ も無理数であることがわかる[2]。

このように数学では（数学に限らず多くの学問が），すでに得られた結果を用いて，その上に新しい結果を作り上げて行くということをする。**(2)** の事実は教科書で $\sqrt{2}$ を証明したのと同様に次のようにしてもできる：

(2) の [証明（その2）] 同様に背理法を用いる。もし ϕ が有理数であると仮定すると，既約分数 $\phi = n/m$ （m と n は互いに素）の形に表せる。$\phi^2 - \phi - 1 = 0$ であるから，$n^2 = m(m+n)$ が成立する。ここですぐわかるように $m \neq \pm 1$ である。従って，m は素因数 p を持つ。つまり n^2 も p で割り切れる。このことは n も p で割り切れることになり,（実はここの議論はきわどい，素因数分解の一意性を使っている）矛盾である。□

ただし，この証明では ”素因数分解の一意性 ”の定理が表に出てきてしまっている。

(5) ある長さが与えられたとき，それの黄金分割は定規とコンパスで作図できる。

[証明] 線分 AB が与えられたとする。このとき

・AB を一辺とする正方形は作図できる，また線分の中点も作図できる。

[2] 普通は素因数分解の一意性を用いた証明をする。

ことに注意しよう。そこでまず AB が与えられたとする，これを一辺とする正方形 $ABCD$ を描き，AB の中点 E を中心とする半径 EC の円弧が，AB の延長と交わる点を F とする。$AB=1$ とすると EC の長さは $\sqrt{(1/2)^2+1^2}=\sqrt{5}/2$。これは EF の長さでもあるから，$AF=(\sqrt{5}+1)/2$ となる。 □

問 2 （１）直線 l とその上にない点 P が与えられたとき，点 P を通り，l に平行な直線を作図せよ。

（２）長さ a,b が与えられたとき，$a\cdot b, a/b$ の長さを作図で見つけよ

3. フィボナッチ数列

(1) 数の並びにはいろいろなものがある：

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\cdots$$

は自然数の並びである。

$$2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,\cdots$$

は正の偶数の並びである。

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,\cdots$$

は素数の並びである（この並びに終わりがあるか？）。では次の並びは何であろう？何か一定の規則で並んでいるだろうか？

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\cdots$$

この並びは注意してみると，次々と前の２つを足して作られていることがわかる。このような数の並びをフィボナッチ数列という。この数列に現れる数もやはり現実の世界に沢山の例がある。花の花弁の数は $3,5,8$ が多い。マリーゴールドの花弁は 13, アスターは 21, ヒナギクは 34 である。花弁の数がフィボナッチ数列になることは科学的な根拠のあることだそうである[3]。ここで隣り合う数の比を求めてみよう：

$1/1=1,\ 2/1=2,\ 3/2=1.5,\ 5/3=1.666\cdots,\ 8/5=1.6,\ 13/8=1.625,\ 21/13=1.61538\cdots, 34/21=1.6190\cdots, 55/34=1.6176\cdots,\ 89/55=1.61818\cdots, 144/89=1.61797\cdots, 233/144=1.61805\cdots$

どうやら $1.6180\cdots$ に近づいているように見える。一方 ϕ を小数で表すと $1.6180\cdots$。これは偶然にしては余りにできすぎている。実際は上の比は限りなく ϕ に近づくことが証明できるのである。

(2) $\phi^2=\phi+1$ より $\phi^3=\phi^2+\phi=2\phi+1$, 従って $\phi^4=2\phi^2+\phi=3\phi+2$, 更に $\phi^5=5\phi+3$. 一般に $\phi^n=a_n\phi+a_{n-1}$ なら $\phi^{n+1}=(a_n+a_{n-1})\phi+a_n$. このように $\phi,\phi^2,\phi^3,\cdots,\phi^n,\cdots$ を ϕ の１次式で表したとき， ϕ の係数と定数項がフィボナッチ数列をなすことがわかる。

---

[3] 植物葉序（phyllotaxis，軸に対する葉の付き方が種によって特定のパターンになること）に関する論文（２００３年１１月の Nature に掲載）がある

(3) 一辺の長さが 1 の正方形が与えられたとして，横に同じ正方形をくっつける。次ぎに縦方向に一辺の長さが 2 の正方形をくっつける。⋯ 次々と長方形に正方形を ”新しい正方形の辺の長さは，その前の２つの正方形の辺の長さの和 ”となるようにくっつける。

このときできあがる長方形の辺の長さはフィボナッチ数列となる。これは黄金長方形の近似である。今度は無限に大きくなる長方形の集合が出来上がる。

少し先の話を紹介しよう。フィボナッチ数列の n 番目を a_n とすると，

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(-1/\phi)^n$$

と表せることがわかる。ここにも黄金比が現れる。

4. 連分数

$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ は一夜一夜に人見頃 ⋯ として無限につづくことを知っている。よって $[\sqrt{2}] = 1$ である。すなわち $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$ である。また $\sqrt{2} - 1 = 1/(\sqrt{2} + 1)$ よって，

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$$

再び，$\sqrt{2} - 1 = 1/(\sqrt{2} + 1)$ を用いて

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}$$

を得る。この操作を続けて結局 $\sqrt{2}$ が

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

と表されることがわかる。この方法は

[**方法**]　”整数部分と１より小さい非負の実数部分に分け，実数部分が０でなければその逆数をとる，という操作を繰り返す ”

というものである。練習として $\sqrt{3}$ を試みてみよう。1 と 2 の繰り返しになる：

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

問 3. $\sqrt{5}$ を連分数展開してみよう。

さて黄金比を連分数で表そう。$\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$ の関係に注目すると簡単に

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

のように見事にきれいに 1 だけ並ぶ連分数の表示を持つことがわかる。黄金比は図形的な美しさも，数字の並びの美しさも持っている。

ここで，逆に連分数表示を途中でストップして計算してみると：

$$1,\quad 1 + \frac{1}{1},\quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}},\quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}},\ \cdots$$

これらの値はそれぞれ

$$1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{6},\cdots$$

である。これは実は前節のフィボナッチ数列から作られた分数の列と一致している。このことからも上の連分数表示が黄金比 ϕ を表していることがわかる。

実は黄金比はまた別の表示を持つ。

$\phi^2 - \phi - 1 = 0$ は $\phi = \sqrt{1+\phi}$ と変形できる。すると，$\phi = \sqrt{1+\phi}$ に自分自身を代入すれば $\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\phi}}$ を得る。この操作を繰り返せば

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$$

と表示されることがわかる。ただこちらの表示方法は連分数より使われる頻度が少ないようである。

すこし話題を発展させよう。有理数を小数で表したとき 1/7 などは有限で終わらないで循環する。では有理数を連分数で表わしたときはどうなのか？その表示はいつかは終わるか？（これを有限の表示を持つという）例えば

$$\frac{43}{30} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$$

である。有限表示をもてば有理数であることは簡単にわかるが，ではその逆の主張は成り立つかというと，実は次の定理がなりたつ：

定理 1. 実数が有限の連分数表示をもつ必要十分条件はそれが有理数であることである。

では上の例 $\sqrt{2}$ の展開のように，循環する無理数はなにか特徴があるのかというと，イエスである。答えは次の通り：

$\sqrt{2}$ や ϕ などはそれぞれ，$x^2 - 2 = 0$, $x^2 - x - 1 = 0$ の解である。このように整数を係数とする 2 次方程式の解になる無理数を 2 次の無理数という，もっと正確に述べると：

定義 2. 整数 a, b, c を係数とする 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解となる無理数を 2 次の無理数という。

このように定義をしておくと特徴を述べることができる。

定理 2. 実数 a に対して，a が循環する連分数に表されることと，a が 2 次の無理数であることと同値である。

このことから，$\sqrt[3]{2}$ や π などは連分数で表したとき決して循環しないこともわかる。

ちなみに

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ddots}}}}$$

である。

また 2 次の無理数には別の特徴がある。§5. で ϕ を作図したように，2 次の無理数は作図できるということである。少し正確にいうと

定理 3. 単位の長さ 1 が与えられたとき，定規とコンパスを用いて，有理数や 2 次の無理数は作図できる。

問 4. $\sqrt[3]{2}$ は無理数であることを数学 A の p.28 例題 2 にならって証明せよ。

不思議に思うかも知れないが，$\sqrt[3]{2}$ は（上の意味で）作図できない量なのである。じつは無理数には沢山の種類がある。無理数の定義を次のように言い換えてみると鮮明になろう：

定義 3. 整数 a, b をどのように選んでも（ただし，$a \neq 0$），これらを係数とする 1 次方程式 $ax + b = 0$ の解とならない実数を無理数という。

さて，定義 2 の 2 次の無理数は無理数のうちで，最も "次数の低い " ものであることがわかる。$\sqrt[3]{2}$ は $x^3 - 2 = 0$ の解になり，次の問の主張が成り立つので，同様に 3 次の無理数という。

次の問は少し難しいかもしれないが挑戦してみよう。

問 5. $\sqrt[3]{2}$ は 2 次の無理数でないことを証明せよ。

難しい事実：円周率 π は小学校以来なじみ深いが，これが無理数だということは知っていると思う。しかしその証明は難しい。じつは単に無理数というだけでなく，とてつもない無理数なのである。

定理 4. 円周率 π は係数が整数のどのような方程式の解にも決してならない。

このような無理数を**超越数**という。もちろん作図は不可能である。円周率が超越数であることは，1882 年にリンデマンによって証明された。

注意 係数が整数の $\cdots$ ということに注目しないと意味がない。例えば係数は実数でもよいとすると，$x - \pi = 0$ という 1 次方程式の解となる！

5. ディオファントス方程式

複数の未知数があって，方程式の個数が未知数の個数より少ないと一般的には解が沢山出てくる。たとえば最も簡単な場合：$2x + 4y = 1$ をみたす実数の組 (x, y) は無限にある。しかし解に条件を付けると状況は変わってくる，例えば解として整数の組 (m, n) とするとどうだろうか？右辺は偶数なのに左辺は奇数 1 なので解なし，となる。あるいは数学 A p.50 の発展問題もこのような問題である。

問題　$10n + 9$ と $5n + 4$ がそれぞれある整数の平方になるとき，n を求めよ。

この問題を解こうとすると，必要条件として，$x^2 - 2y^2 = 1$ をみたす整数 (x, y) のすべての組を求めることに帰着する。この方程式では $(x, y) = (1, 0), (3, 2)$ という解があることはすぐわかる，その他にない

のか？あるとすれば全部求めることはできるのか？実はこのすべての解を求めることと $\sqrt{2}$ の連分数展開とが深い関係をもっているのである。展開を途中でやめて普通の分数を作ると：

$$1,\ \ 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ \ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5},\ \ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{17}{12},\ \cdots$$

であり，それぞれ $(3,2),(7,5),(17,12),\ldots$ が $x^2-2y^2=\pm1$ の解となる！実はすべての解を求めることができる，その証明は少し難しいので省略するが，答えは次ぎの通り：すべての解は $(\pm x_n,\pm y_n)$ の形をしていて，

$$\begin{cases} x_n=\{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n\}/2 \\ y_n=\{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n\}/2\sqrt{2} \end{cases}$$

である。

上の問のようにいくつかの未知数を含む多項方程式の整数解，または有理数解を求める問題をディオファントス問題という。もっとも有名な問題は 350 年かかってやっと近年解決した，フェルマーの最終定理であろう：

定理 5. *$n\geq 3$ の整数のとき $X^n+Y^n=Z^n$ をみたす整数の組 (X,Y,Z), $XYZ\neq 0$ は存在しない。*

問 6. $n=2$ のときできるだけ沢山の解 (X,Y,Z) を見つけよ。

$n=2$ のときは無限に解が存在することがわかる。これは直角三角形の 3 辺がすべて整数でできているものを求めることと同じである。このような三角形をピタゴラス三角形という。

上のフェルマーの定理の式で両辺を Z^n で割り，$x=X/Z,\ y=Y/Z$ とおけば，$x^n+y^n=1$ の有理数の解 $(x,y),xy\neq 0$ を求めることと同値になる。そうすると平面上にこの関係のみたす点の集合，すなわち曲線を考えるということもでき，この曲線の上にある x,y 座標が共に有理数の点を探すことと同値になる。ちなみに $n=2$ のときはこの曲線は半径が 1 の円となり，単位円上の x,y 座標ともの有理数の点を求めることと同じになる。このように数量と図形の両方を考えることで問題の本質がよく見えて，問題が解決することも多い。

6. 長い間の疑問

１．数学 II で 2 次方程式の解の公式を学んだが，では $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解の公式はあるのか？ さらに ４，５ ⋯ 次方程式の解の公式はあるのか？そもそも解はあるのか？

２．整数 $\Rightarrow$ 有理数 $\Rightarrow$ 実数 $\Rightarrow$ 複素数と範囲を広げてきたけどこの先に何か新しい数はあるのか？

３．直線，平面，空間と広がってくるけど，それに続くものはあるのか？４次元空間と聞くけどどういうものなのか？

４．宇宙の話で曲がった空間と言う言葉を聞くけど，そういうものを数学でも考えているのか？

５．２次関数，三角関数，指数関数，対数関数など学んだが，他に特別な関数はあるのか？またこれらは実数を変数とするが，変数も値も複素数の関数はあるのか？

６．”虚円 ”$x^2 + y^2 = -1$ は何か意味のある対象なのか？

では逆に今まで疑問に思っていたことが解決することもあるのか？例えば

７．なぜ $1 + 1 = 2$ なのか？なぜ 0 で割ることはできなのか？虚数など何か役に立つことはあるのか？

８．反比例のグラフの双曲線は無限の彼方でつながっていると聞いたことがあるが，本当なのか？

９．アキレスとカメの問題は解決するのか？

１０．数学は本当に完璧に完全なのか？

7. 現代数学への展望

実は中学生にも問題の意味がわかるのに，現代数学でも解決できない問題は沢山ある。例えば

未解決問題（ Goldbach 予想）$4 = 2 + 2,\ 6 = 3 + 3,\ 8 = 5 + 3,\ 10 = 7 + 3 = 5 + 5,\ 12 = 5 + 7, \cdots$ のように，2 以外の偶数は，２つの素数の和として表せるか？

もしこれを解決したなら，歴史に名前を残す程有名になるであろう。数学は現在でもますます発展を続けている。もちろん現代科学の基礎として使われている数学は過去に完成したものが多いが，なかには近年の情報科学の基礎になっている符号理論などのように，全く抽象的で完全に観念の産物と思われていた（正標数の代数曲線の）理論などのように，近年の成果が使われることもある。

過去においては現実には役に立たないもの，あるいは役に立つことは考えないで，純粋に理論的興味だけで研究されていた数学が何世紀か後になって役に立っているのである。一番の典型は非ユークリッド幾何学から発展したリーマン幾何学が，アインシュタインによって相対性理論に使われたことであろう。

数学にはノーベル賞はない，しかしそれに代わるフィールズ賞というものがある。また 2001 年ノルウェー政府によってアーベル賞[4]という賞も作られ，第一回の受賞者に 2003 年 4 月フランスの Jean Piere Serre 氏が受賞した。ちなみに Serre はフィールズ賞も 1954 年に受賞している。日本人でフィールズ賞を受賞した数学者は３人である。

[4]http://www.norway.or.jp/infolink/topics/030404.html

数学はますます専門分野を深める一方，ダイナミックにその裾野を広げているのである。

8. 人名・参考文献

この授業に関連した人名をあげる。このほかにも沢山著名な数学者はいる。下の文献 [3] で伝記を読んでみることをお勧めします。

アーベル　（ノルウェー，1802–1829）
ガウス　（ドイツ, 1777–1855）
ガロワ　（フランス, 1811–1832）
ディオファントス　（246?–330?）
ピタゴラス　（ギリシャ，572–492 BC）
フィボナッチ　（イタリア，1170–1240）
フェルマー　（フランス，1601–1665）
ユークリッド　（ギリシャ，330–275 BC）

一人で学ぶときの参考になる文献

[1] 図解雑学　フェルマーの最終定理　富永裕久著　ナツメ社
[2] 幾何への誘い　岩波現代文庫　学術７　小平邦彦著　岩波書店
[3] 数学をつくった人々上・下　東京図書　E.T. ベル著 ； 早川書房からこの本の文庫版が出ています。
[4] 宇宙＝１，２，３，⋯ 無限大，ガモフ著，白揚社