

代数系 I 小テスト

2011.06.13 吉原

- (1) 以下の集合 I は R のイデアルになるかどうか、理由を付けて答えよ。
- (a) $R = \mathbb{Z}$ のとき、 I は 5 の倍数の集合。
 - (b) $R = \mathbb{Z}$ で、 I は 5 で割ったとき、1 余る数の集合。
 - (c) $R = \mathbb{R}[x]$ のとき、 $I = \{ f \in R \mid f(0) = 1 \}$.
 - (d) $R = \mathbb{R}[x]$ のとき、 $I = \{ f \in R \mid f(0) = 0 \}$.
 - (e) J を R のイデアルとするととき $I = \{ a^2 \mid a \in J \}$.
- (2) $R = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ とするとき、以下の問いに答えよ。
- (a) R の単元を求めよ。
 - (b) R の零因子を求めよ。(但し、零は含めないとする)
 - (c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow R$ を 15 の剰余類を対応させる写像 $f(n) = \bar{n}$ としたとき、 \mathbb{Z} のイデアル $I = (2)$ および $J = (3)$ の像は R のどのようなイデアルになるか？
- (3) p, q は素数で $p < q$ として、 $R = \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ とするとき、以下の問いに答えよ。
- (a) R の単元の個数を求めよ。
 - (b) R の零因子の個数を求めよ。(但し、零は含めないとする)
- (4) f を環 R から環 R' への準同型写像で、 $f(1) = 1'$ とする。このとき、次のことを証明せよ。
- (a) $f(0) = 0'$
 - (b) $f(-a) = -f(a)$
 - (c) R の単元は R' の単元に移ることを証明せよ。
 - (d) f の核は R のイデアルになる。
- (5) $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ として、 R の元を成分とする、 2×2 行列の集合 $M(2, R)$ を考える。
- (a) $M(2, R)$ に成分が実数のときと同様に、加法と乗法が定義出来ることを示し、この集合が環になることを示せ。
 - (b) $M(2, R)$ は可換環か？
 - (c) $M(2, R)$ の要素の数はいくつか？
 - (d) $M(2, R)$ の単元をすべて書け。