代数系 II テスト

２００５年2月１０日(吉原)

注意：講義で学んだ定理は証明なしに用いてよい。

$\boxed{1}$ （１）F を体とするとき，$f(x) \in F[x]$ が $F[x]$ で既約であることの定義を述べよ。

（２）F の部分体あるいは拡大体 E に対して $E[x]$ での $f(x)$ の既約性について論ぜよ。

（３）n を整数とするとき $f(x) = x^2 - n \in \mathbb{Q}[x]$ が既約であるのは，n がどのような数であるときか？

（４）$f(\alpha) = 0$ とするとき $\mathbb{Q}(\alpha)$ の $\mathbb{Q}$ の上の自己同型をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ $f(x) = x^4 - 2$ とするとき，次の問に答えよ。

（１）$f(x)$ は $\mathbb{Q}[x]$ で既約であることを証明せよ。

（２）$f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上の分解体 E を求めよ。

（３）次数 $[E : \mathbb{Q}]$ を求めよ。

$\boxed{3}$ （１）$\mathbb{Q}$ の２次拡大 E は必ず $\mathbb{Q}(\sqrt{a}), a \in \mathbb{Q}$ と表せることを証明せよ。

（２）では，３次拡大のときはどうか？すなわち，$\mathbb{Q}$ の３次拡大 E は必ず $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{a}), a \in \mathbb{Q}$ と表せるか？

$\boxed{4}$ 　複素数平面上で半径１の円に内接する正８角形の一つの頂点を $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/8)$ とする。

（１）ζ の満たす $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f(x)$ を求めよ。

（２）$f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上の分解体 E を求めよ。

（３）$[E : \mathbb{Q}]$ を求めよ。

（４）拡大 $E/\mathbb{Q}$ のガロワ群を求めよ。すなわちどのような変換から成り立っているか，と群がどのようなものかを決定せよ。

$\boxed{5}$ 　高校の教員になって数学 II の授業をしていた。生徒から２次方程式の解の公式は係数が複素数のときも使えるのですか？と質問された，あなたならどのように答えますか？いろいろな学力の生徒を想定して答えよ。