

代数系 II テスト

2009 年 2 月 5 日 (吉原)

授業で学んだ定理は自由に使ってよい。

1 以下の問いに答えよ。

- (1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n \geq 2$) が体となる必要十分条件は n が素数であることであることを証明せよ。
- (2) p, q を相異なる素数とする。このとき $\{1, \sqrt{q}\}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ 上 1 次独立であることを証明せよ。
- (3) p, q を相異なる素数とする。このとき $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ から $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ への同型写像は存在しないことを証明せよ。
- (4) $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ について, $f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$ ならば, $f(x)$ は $\mathbb{Q}[x]$ において $x^4 - 10x^2 + 1$ で割り切れることを示せ。
- (5) α^2 が \mathbb{Q} 上超越的であるとき, α も \mathbb{Q} 上超越的であることを示せ。

2 $f(x) = x^4 - 10$ として $f(x) = 0$ の正の根を $\alpha = \sqrt[4]{10}$ とおく。このとき以下問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ は $\mathbb{Q}[x]$ で既約であることを示せ。
- (2) $1/(\alpha + 1)$ を係数が \mathbb{Q} の α の 3 次以下の整式として表せ。
- (3) $f(x)$ の \mathbb{Q} 上の最小分解体 K を求め、 $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ。
- (4) ガロワ群 $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を求めよ。
- (5) $\mathbb{Q}(\alpha)$ と \mathbb{Q} の中間体を求めよ。