代 数 系 I テスト

０７年7月３０日 実 施（吉 原）

$\boxed{1}$ R は可換環で 1 を含むものとし， I と J は R のイデアルとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $I+J=\{\ a+b \mid a\in I,\ b\in J\}$ とするとき，$I+J$ は R のイデアルになることを示せ。

(2) イデアル K が I と J を同時に含んだとしたら，K は $I+J$ を含むことを示せ[1]。

(3) $\mathbb{Z}$ において，$(66)+(105)=(n)$ を満たす自然数 n を求めよ。

$\boxed{2}$ 環 $R=\mathbb{Q}[x]$ において以下の問いに答えよ。

(1) R の元 f が R において既約であることの定義を述べよ。

(2) $g=x^3+2x^2+3x+1$ と $h=x^4+24$ は既約であることを示せ。

次に，環 $S=\mathbb{R}[x]$ において上の $g,\ h$ は既約であるかどうか，理由とともに述べよ。

$\boxed{3}$ $\omega=\exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ であるとし，$R=\{\ a+b\omega \mid a,\ b\in\mathbb{Z}\}$ とおく。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\mathbb{Z}[x]$ の既約多項式 f で $f(\omega)=0$ を満たすものを求めよ。

(2) R は複素数の演算により環になることを示せ。

(3) R の単元をすべて求めよ。

(4) 3 は $\mathbb{Z}$ の素数であるが，R においては因数分解されることを示せ，すなわち，単元でない元の積として表わせることを示せ。

$\boxed{4}$ 以下 R は可換環で 1 を含むものとする。このとき次の問の答えよ。

(1) R の極大イデアル M の定義を述べよ。

(2) $a\notin M$ なら $ax+m=1$ を満たす $x\in R,\ m\in M$ が存在することを示せ。（hint: イデアル $(a)+M$ を考えよ。）

(3) 極大イデアルは素イデアルであることを示せ。

[1]すなわち，$I+J$ は I と J を同時に含むイデアルで一番小さいものである。