正規 5 次曲面のガロア点

高橋 剛

代数幾何講演会, 埼玉大学, 2002 年 9 月 18 日 (水)

1. Introduction

基礎体 k を特に断らない限り標数ゼロの代数閉体とします. $V \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を既約な超曲面とし, その次数を $d = \deg V$ とします. 点 $P \in \mathbb{P}^{n+1}$ からの射影 $\pi_P : V \cdots \to \mathbb{P}^n$ を考えます. $\mathrm{mult}_P V \neq d$ のときにこの射影 π_P は支配的な写像となり, 体の拡大 $K(V)/K(\mathbb{P}^n)$ を得ます. この体の拡大は点 P の取り方に依存しますので, $K = K(V)$, $K_P = K(\mathbb{P}^n)$ と書くことにします.

Definition 1 (吉原)**.** *拡大 K/K_P がガロア拡大のときに, 点 P を Galois point for V と呼ぶ. さらに, $P \in V$ のときに inner Galois point と呼び, $P \notin V$ ときに outer Galois point と呼ぶ.*

§1.1. 動機

Galois point の研究はまず非特異 4 次曲線に対して行われました. 研究動機は, 超越拡大 K/k の構造について調べたいというところにあったようです. $\mathrm{tr.deg}_k K = 1$ のときには, Lüroth の定理があります.

Theorem 1 (Lüroth の定理)**.** *k を無限体とし, M は k 上の純超越拡大体とする. このとき M の部分体 N が $M \supset N \supset k$, $\mathrm{tr.deg}_k N = 1$ ならば, N も k 上の純超越拡大体である.*

また, 平面曲線については次の定理があります.

Theorem 2 (難波 [8], p.372)**.** *$C \subset \mathbb{P}^2(k)$ を非特異平面曲線で $d = \deg C \geq 2$ とする. このとき, C は $(d-1)$-gonal で, gonality を与える射は点射影 $\pi_P : C \to \mathbb{P}^1$, $P \in C$ である.*

この二つの定理から, $K = K(C)$, $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ は非特異平面曲線のとき, 超越拡大 K/k に対しての考察の手段として, Galois point を考えることには意味があるといえます.

§1.2. 自然な問題

Galois point が定義されますと, 自然に次のような問題が考えられます. (吉原)

(1) Galois point を持つ超曲面 V はどのようなものか? また Galois point とは幾何的にどのような点か?
(2) V 上には Galois point は最大で何個存在するのか?
(3) 拡大 K/K_P のガロア閉包を L_P とするとき, L_P の幾何モデルはどのようなものか?
(4) L_P/K_P のガロア群は何か?
(5) L_P/K_P の中間体はどのようなものがあるのか?
(6) 拡大 K/K_P は点 P を動かしたときにどのようにかわるのか?

このような問題に対して, 吉原, 三浦, 高橋らによって研究が進められてきました. 詳しくは References にある論文をご覧ください. 本公演では特に『Galois point を持つ V はどのようなものか? また Galois point とは幾何的にどのような点か?』と『V 上には inner Galois point は最大で何個存在するのか? 』について述べたいと思います.

§1.3. 非特異超曲面の場合

V が非特異超曲面の場合は次の補題が成り立ちますので, 点 P が Galois point になるかどうか判定することが容易です.

Lemma 1 (吉原 [14]). *$V \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を非特異 d 次超曲面 $(d \geq 4)$ とする. このとき, $P \in V$ が Galois point であることと, 射影変換によって $P = (1:0:\cdots:0)$, V の定義方程式を $X_1X_0^d + G(X_1, \ldots, X_{n+1}) = 0$ とできることは同値である. ただし, $G(X_1, \ldots, X_{n+1})$ は $X_1, \cdots, X_{n+1}$ に関する d 次斉次多項式である. また, $P \in V$ が Galois point ならば, $\mathrm{Gal}(K/K_P)$ は $d-1$ 次の巡回群である.*

この捕題は,「非特異 d 次平面曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ $(d \geq 4)$ の自己同型は $\mathbb{P}^2$ の射影変換から得られる.」(難波 [8], p.372) ということから証明できます. 特異点をもつ超曲面上の点が Galois point か否か判定することは, この事実が成り立たないため, 曲線の場合でさえたいへん難しい問題となります.

次の定理によって, 非特異超曲面の Galois point の分布は完全に決定されています.

Theorem 3 (吉原 [14]). *$V \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を非特異 d 次超曲面 $(d \geq 4)$ とする. inner Galois point の数を $\delta(V)$ と書くことにする. $m = [n/2]$ ($n/2$ を越さない最大の整数) と置く.*

(1) $d = 4$ のとき, $\delta(V) \leq 4(m+1)$. $\delta(V) = 4(m+1)$ という V は

$$F = X_{m+1}X_0^3 + \cdots + X_{2m+1}X_m^3 + X_{m+1}^4 + \cdots + X_{n+1}^4 = 0$$

で定義される超曲面と射影同値である.

(2) $d \geq 5$ のとき, $\delta(V) \leq m+1$. $\delta(V) = m+1$ という V は

$$F = X_{m+1}{X_0}^{d-1} + \cdots + X_{2m+1}{X_m}^{d-1} + G(X_{m+1}, \ldots, X_{n+1}) = 0$$

で定義される超曲面と射影同値である．ここで, G は $X_{m+1}, \cdots, X_{n+1}$ に関する d 次斉次多項式である．

例を計算してみましょう．

Example 1. 非特異 4 次曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ の定義方程式を $F(X,Y,Z) = YZ^3 + X^4 + Y^4 = 0$ とする．このとき, Galois point は $(0:0:1)$, $(0:\zeta:1)$, $(0:\zeta^3:1)$, $(0:\zeta^5:1)$ の 4 点である．ここで, ζ は 1 の原始 6 乗根である．例えば, 点 $(0:0:1)$ について考察しょう．C の定義方程式を非斉次座標で書くと, $f(x,y) = y + x^4 + y^4 = 0$ となる．$\pi_P : C \to \mathbb{P}^1$ は点 $(0:0:1)$ 中心の射影だから $(x,y) \mapsto t = y/x$ という射である．ここで関数体は $K = k(x,y) = k(t)(x)$, $K_P = k(t)$ であり, $K/K_P = K_P(x)/K_P$ であることに注意する．$y = tx$ を定義方程式に代入すると, $f(x,tx) = tx+x^4+t^4x^4 = 0$ となるので, $x^3+t/(1+t^4) = 0$ が x の K_P 上の最小多項式であることがわかる．確かに K/K_P は 3 次のガロア拡大でそのガロア群 $\mathrm{Gal}(K/K_P)$ は巡回群である．また, $\mathrm{Gal}(K/K_P)$ の生成元を σ とすると, σ から C の自己同型射 $\sigma^* : C \to C$ が得られる．この σ^* は $\mathbb{P}^2$ の射影変換に拡張でき, それは $x \mapsto \zeta^2 x$, $y \mapsto \zeta^2 y$ であることがわかる．

他の 3 点も同様の方法で Galois point であることがわかる．

このように非特異超曲面に対する Galois point の分布の問題は完全に解決してされました．次は特異点を持つ超曲面の Galois point を考察しよう, というのは自然な流れといえます．

2. Smooth Galois Points on Normal Surfaces

$\mathbb{P}^3$ の斉次座標を $(X:Y:Z:W)$ とし, 非斉次座標を $(x,y,z) = (X/W, Y/W, Z/W)$ とします．$S \subset \mathbb{P}^3$ を正規 d 次 $(d \geq 4)$ 曲面とし, 点 $P \in S$ 中心の射影を $\pi_P : S \cdots \to \mathbb{P}^2$ と書くことにします．このとき, 点 P が S の d 重点でなければ, π_P は支配的な有理射となり, 体の拡大 $k(S)/k(\mathbb{P}^2)$ を得ます．この拡大は点 P に依存しますので $K = k(S)$, $K_P = k(\mathbb{P}^2)$ と書くことにします．

Definition 2 (吉原, 三浦)**.** *$P \in S$ に対して, 拡大 K/K_P がガロア拡大のときに点 P を S 上の Galois point と呼ぶ．さらに, P が非特異点のとき smooth Galois point と呼び, P が特異点のとき non-smooth Galois point と呼ぶ．*

上で述べましたように, 特異点を持つ平面曲線の Galois point を研究することは易しくはありません．しかし, 2 次元の正規超曲面に関しては次がなりたちます．

Lemma 2. *$S \subset \mathbb{P}^3$ を d 次正規超曲面, P を S 上の点とする．点 P を通る超平面切断全体からなる線形系を $\mathcal{C}$ とかく．このとき,*

(1) (*Bertini*の定理) $\mathcal{C}$ の一般元 C は, P 以外に特異点を持たない既約 d 次曲線である. (P が S の非特異点なら, C は P で非特異.)
(2) P が S の *Galois point* であることと, P が $\mathcal{C}$ の一般元 C の *Galois point* であるとは同値である. さらに, P が S の *Galois point* ならば $\mathrm{Gal}(S/\mathbb{P}^2) = \mathrm{Gal}(C/\mathbb{P}^1)$ が成り立つ.

したがって, Galois point に関する研究において, 特異点を持つ平面曲線よりも 2 次元の正規超曲面のほうが扱い易い対象である, といえます.

このセクションでは smooth Galois point について考察します. SGP(S) を S 上の smooth Galois point 全体の集合とします. S の定義方程式を $F(X,Y,Z,W)=0$ とし, その非斉次化したものを

$$f(x,y,z) = F(x,y,z,1) = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$$

($f_i = f_i(x,y,z)$ は i 次斉次成分) とします. 非特異超曲面の Galois point のときと同様に次の補題により, $P \in S$ が smooth Galois point か否か判定するのは容易です.

Lemma 3. *$P=(0:0:0:1) \in S$ とし, S の定義方程式を $f(x,y,z) = f_1 + \cdots + f_d = 0$ (f_i は f の i 次斉次成分) と書く. このとき次の 3 つの主張は同値である.*
(1) 点 P が S の *smooth Galois point* である.
(2) $\mathbb{P}^2$ の射影変換が存在して, S の定義方程式を

$$ZW^{d-1} + G(X,Y,Z) = 0$$

($G(X,Y,Z)$ は d 次斉次多項式) とできる.
(3) $f_1 \neq 0$, $f_2/f_1 \in k[x,y,z]$, $f_{i+1} = \binom{d-1}{i} f_1 (\frac{f_2}{(d-1)f_1})^i$ ($i=0,1,\cdots,d-2$) が成り立つ. 特に $d=4$ のときは, $f_1 \neq 0$, $f_2^2 = 3f_1f_3$ が成り立つ.

この補題の証明は, 非特異超曲面の Galois point のときと同様に次の補題によります.

Lemma 4. *もし P が S の smooth Galois point ならば, $\mathrm{Gal}(K/K_P)$ の元 σ より得られる S の自己双有理写像 $\sigma^* : S \cdots \to S$ は $\mathbb{P}^3$ の射影変換に拡張される.*

§2.1. 正規 4 次曲面の smooth Galois point [9]

$d=4$ のときには, 次の結果が成り立ちます.

Theorem 4. *S を 正規 4 次曲面とし, SGP(S) が有限集合であると仮定する. このとき $\sharp\mathrm{SGP}(S) = 0,1,2,4,5$ or 8. さらに詳しく, 次がわかる.*
(1) $\sharp\mathrm{SGP}(S) = 1$ のとき, 射影変換によって S の定義方程式を $ZW^3 + G(X,Y,Z) = 0$ とできる. ここで G は 4 次斉次多項式である.

(2) $\sharp\mathrm{SGP}(S)=2$ のとき, 射影変換によって S の定義方程式を
(a) $XY^3+ZW^3+H(X,Z)=0$ もしくは
(b) $ZY^3+ZW^3+H(X,Z)=0.$
とできる. ここで, H は 4 次斉次多項式である.
(3) $\sharp\mathrm{SGP}(S)=4,$ のとき, 射影変換によって S の定義方程式を $ZW^3+Z^4+H(X,Y)=0$ とできる. ここで, H は 4 次斉次多項式である.
(4) $\sharp\mathrm{SGP}(S)=5$ なる S は $XY^3+ZW^3+Z^4=0$ で与えられる曲面と射影同値である.
(5) $\sharp\mathrm{SGP}(S)=8$ なる S は $XY^3+ZW^3+X^4+Z^4=0$ で与えられる曲面と射影同値である.

S が非特異 4 次曲面のときは, $\mathrm{SGP}(S)$ は有限集合でした. (cf. 吉原 [13]). しかし特異点を持つ 4 次曲面 S で $\mathrm{SGP}(S)$ が無限集合になるようなものが存在します.

Theorem 5. *S を正規 4 次曲面とし, $\mathrm{SGP}(S)$ が無限集合であると仮定する. このとき S は Galois point を持つ非特異 4 次曲線 C 上の cone になる. さらに詳しく次がわかる.*
(1) 射影変換によって S の定義方程式を $ZW^3+H(X,Z)=0$ とできる. ここで, H は 4 次斉次多項式である.
(2) O を *cone* S の頂点とし, $\mathrm{GP}(C)$ を C 上の *Galois point* の集合とする. このとき, 次がわかる.

$$\mathrm{SGP}(S)=\bigcup_{P\in\mathrm{GP}(C)} l(P,O)-\{O\}.$$

ただし, $l(P,O)$ は点 P と O を通る直線である.
(3) $\mathrm{SGP}(S)\cup\{O\}$ は直線の和集合であり, その直線は高々4 本である. さらに, 4 直線よりなるための必要十分条件は S が $ZW^3+X^4+Z^4=0$ で与えられる曲面と射影同値になることである.

§2.2. 正規 d 次曲面 $(d\geq 5)$ の smooth Galois point

$d\geq 5$ のときには, 次の結果が成り立ちます.

Theorem 6. *$S\subset\mathbb{P}^3$ を degree $d\geq 5$ の正規曲面とする. そして $\mathrm{SGP}(S)$ は 有限集合と仮定する. このとき $\sharp\mathrm{SGP}(S)=0,1$ or 2 である. さらに詳しく次がわかる.*
(1) もし $\sharp\mathrm{SGP}(S)=1$ ならば $\mathbb{P}^3$ の射影変換が存在して S の定義方程式を $ZW^{d-1}+G(X,Y,Z)=0$ ($G(X,Y,Z)$ は d 次斉次多項式) とできる.
(2) もし $\sharp\mathrm{SGP}(S)=2$ ならば $\mathbb{P}^3$ の射影変換が存在して S の定義方程式を
(a) $XY^{d-1}+ZW^{d-1}+H(X,Z)=0$ もしくは
(b) $ZY^{d-1}+ZW^{d-1}+H(X,Z)=0$

とできる. ここで $H(X,Z)$ は d 次斉次多項式である.

Theorem 7. $S \subset \mathbb{P}^3$ を *degree* $d \geq 5$ の正規曲面とする. そして $\mathrm{SGP}(S)$ は 無限集合と仮定する. このとき, S は *Galois point* を持つ d 次非特異平面曲線 C 上の *cone* になる. さらに詳しく次がわかる.

(1) $\mathbb{P}^3$ の射影変換によって S の定義方程式を

$$ZW^{d-1} + H(X,Z) = 0$$

とできる.

(2) O を *cone* S の頂点とし, P を *base curve* C の *Galois point* とする. このとき

$$\mathrm{SGP}(S) = l(P,O) - \{\, O \,\}$$

である. ここで, $l(P,O)$ は点 P, O を通る直線である. (*degree* $d \geq 5$ の非特異平面曲線の *Galois point* は高々1 個しか存在しないことに注意.)

3. Galois Points on Normal Quintic Surfaces

次は non-smooth Galois point について考察しましょう.

正規 4 次曲面の 2 重点と 3 重点は non-smooth Galois point です. $\sharp\mathrm{SGP}(S) \geq 2$ となる 4 次曲面に対して, S の取りうる特異点を決定することができます. 詳しくは [9] をご覧ください.

5 次正規曲面の non-smooth Galois point に関して次が成り立ちます. 3 重点と 4 重点は Galois point ですが, 2 重点ならば Galois point になるとは限らないことに注意してください.

Theorem 8 (Main Theorem!)**.** $S \subset \mathbb{P}^3$ を 5 次正規曲面とする. このとき $\sharp\mathrm{SGP} = 0, 1, 2, \infty$ である. さらに *non-smooth Galois point* に関して次がわかる.

(1) $\sharp\mathrm{SGP} = \infty$ のとき, S 上に *non-smooth Galois point* はない.

(2) $\sharp\mathrm{SGP} = 2$ のとき, $\mathrm{mult} = 2$ の *Galois point* は存在せず, $\mathrm{mult} = 3$ もしくは 4 なる点は高々1 個である.

(3) $\sharp\mathrm{SGP} = 1$ のとき, $\mathrm{mult} = 2$ の *Galois point* は高々1 個である. *smooth Galois point* を P と書く.

 (a) $\mathrm{mult} = 2$ の *Galois point* を持たないとき, S 上の $\mathrm{mult} = 3$ もしくは 4 なる点は高々3 個である.

 (b) $\mathrm{mult} = 2$ の *Galois point* を 1 個持つとき, その点を Q とする. 正規 5 次曲面の定義方程式は射影変換によって,

$$ZW^4 + H_2Y^3 + H_3Y^2 + H_4Y + H_5 = 0,$$

 と書け, $P = (0:0:0:1)$, $Q = (0:1:0:0)$ である. ここで, $H_i = H_i(X,Z)$ は i 次斉次多項式であり, $H_3^2 = 3H_2H_4$ という

関係がある．S 上の mult $= 3$ もしくは 4 なる点は高々2 個である．

Example 2.

$$ZW^4 + X^2Y^3 + 3XZ^2Y^2 + 3Z^4Y + X^2Z^3 - 3XZ^4 + 3Z^5 = 0$$

で定義される 5 次曲面の Galois point は 4 点あり，$(0:0:0:1)$ は smooth Gapois point, $(0:1:0:0)$ は mult $= 2$ の Galois point, $(1:0:0:0)$ と $(1:-1:1:0)$ は 3 重点である．

上の定理は Lemma 2 と次の命題を使って証明できます．

Proposition 1 ([11])**.** *C を 特異点をただ一つだけ持つ平面 5 次曲線で，その種数を $g(C)$ $(= 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ とする．その特異点を P と書き，2 重点であると仮定する．このとき P について次がわかる．*

(1) もし $g(C) = 0$ もしくは 3 ならば P は *Galois point*ではない．

(2) もし $g(C) = 1$ ならば P が *Galois point* であるための必要十分条件は C が次の式で定義される曲線と射影同値になることである：

$$\begin{aligned} &y^2 - 6xy\,(x + 2y) + 3x\left(3x^3 + 12x^2y + 10xy^2 - 3y^3\right) \\ &\qquad + 3xy\left(6x^3 + 21x^2y + 19xy^2 + y^3\right) = 0. \qquad \text{(C1)} \end{aligned}$$

(3) もし $g(C) = 2$ ならば P が *Galois point* であるための必要十分条件は C が次の式で定義される曲線と射影同値になることである：

$$\begin{aligned} &y^2 - 54c^4\,(1 + c)\,xy\,(x + y) \\ &\qquad + 243c^6(1 + c)^2x\,(x + y)\left((1 + c)\,y^2 + 3c^2x\,(x + y)\right) \\ &\qquad - 729c^8(1 + c)^4xy\,(x + y)\left(-\,(1 + c)\,y^2 + 9c^2x\,(x + y)\right) = 0, \qquad \text{(C2)} \end{aligned}$$

ここで $c \in k$, $c \neq 0, -1$ である．

(4) *If* $g(C) = 4$, ならば P が *Galois point* であるための必要十分条件は C が次の式で定義される曲線と射影同値になることである：

$$y^2 + h_5(x, y) = 0 \qquad \text{もしくは} \qquad \text{(C3)}$$

$$y^2 + 3x^2y + 3x^4 + h_5(x, y) = 0, \qquad \text{(C4)}$$

ここで $h_5(x, y)$ は 5 次斉次多項式である．

(5) *If* $g(C) = 5$, ならば P が *Galois point* であるための必要十分条件は C が次の式で定義される曲線と射影同値になることである：

$$xy + h_5(x, y) = 0, \qquad \text{(C5)}$$

ここで $h_5(x, y)$ は 5 次斉次多項式である．

Problem 1. $S \subset \mathbb{P}^3$ を正規 5 次曲面とする．$\sharp\mathrm{SGP} = 0$ と仮定する．このとき，重複度 2 の Galois point の簡単な判定法を見つけ，それを用いて Galois point がどのように分布しているか調べよ．

謝辞.

本発表の機会を与えていただきありがとうございました. 酒井先生に感謝いたします. また吉原先生には本研究に対して多くの有益なアドバイスをいただきました. この場にて感謝いたします.

References

[1] M. Kanazawa, T. Takahashi and H. Yoshihara, The group generated by automorphisms belonging to Galois points of the quartic surface, Nihonkai Math. J., **12** (2001), 89–99.
[2] K. Miura, Field theory for function fields of singular plane quartic curves, Bull. Austral. Math. Soc., **62** (2000), 193–204.
[3] ———, Field theory for function fields of plane quintic curves, to appear in Algebra Colloq.
[4] ———, Galois points on singular plane quartic curves, preprint.
[5] ———, On plane curves with a Galois point, preprint.
[6] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, J. Algebra, **226** (2000), 283–294.
[7] ———, Field theory for the function field of the quintic Fermat curve, Comm. Algebra, **28** (2000), 1979–1988.
[8] M. Namba, "Geometry of projective algebraic curves", Marcel Dekker (1984).
[9] T. Takahashi, Galois points on normal quartic surfaces, to appear in Osaka J. math.
[10] ———, Minimal splitting surface determined by a projection of a smooth quartic surface, Algebra Colloq., **9** (2002), 107–115.
[11] ———, Non-smooth Galois point on a quartic curve with one singular point, preprint.
[12] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra, **239** (2001), 340–355.
[13] ———, Galois points on quartic surfaces, J. math. Soc. Japan, **53** (2001), 731–743.
[14] ———, Galois points for hypersurfaces, preprint.

Graduate School of Science and Technology
Niigata University
Niigata 950-2181
Japan
e-mail: takahashi@melody.gs.niigata-u.ac.jp