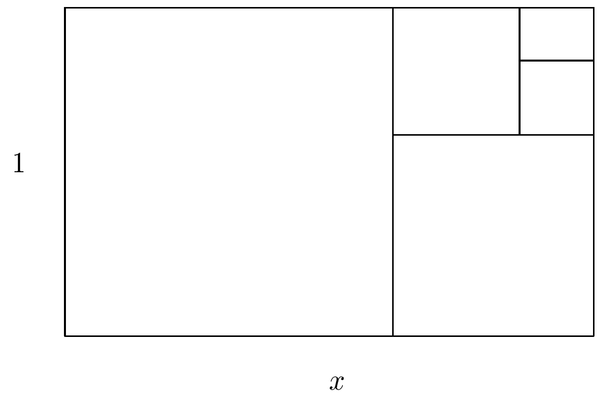
# 数 学 トップセミナー 問 題

新潟大学理学部　吉 原 久 夫

(1) 縦の長さが 1、横の長さが $x$ $(1 < x < 2)$ の長方形 $R_1$ があり，下のように短い方の辺を一辺とし、長い方の辺を一部分共有する正方形 $S_1$ を内部に作り，$R_1$ から $S_1$ を除いた部分の長方形を $R_2$ とする。$R_2$ についても同様に、これの短い方の辺 $x-1$ を一辺とする正方形 $S_2$ を内部につくり、$R_2$ から $S_2$ を除いた部分の長方形を $R_3$ とする。ただし、$R_2$ から $S_2$ はちょうど１個だけ作れるとする。同様に次々とちょうど１個ずつ小さい正方形 $S_1, S_2, S_3, \ldots$ が作れるような長方形 $R_1$ を考える。



このとき以下の問いに答えよ。

(a) 7 個以上の正方形 $S_1, S_2, \ldots, S_7$ ができるためには $x$ の範囲はいくらであればよいか?

(b) 上の操作を限りなく繰り返せるような $x$ があるか？ あるとしたらそのときの $x$ の値はいくらか？

(c) 上と同様な方法で今度は最初１個、次に２個、その次１個、さらにその次２個と、交互に１個と２個小正方形が取れるときを考える。このような操作が 7 回以上できるとき、 $x$ の値の範囲はいくらであればよいか？

(d) (c) の操作を限りなく繰り返せるような $x$ があるか？ あるとしたらそのときの $x$ の値はいくらか？

(e) $x = 43/30$ のとき同様な方法で得られる小正方形の数の列を求めよ。

(f) $x$ が正の有理数 $n/m$ のとき、得られる小正方形の数の列は有限で終わるか？もしそうならその理由を考えてみよう。

(g) 上と同様に小正方形を作る。小正方形が順に $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 個と取れ、この繰り返しが限りなく続けられるとき $x$ は無理数であり、しかも整数を係数とする２次方程式の解となることを示せ。

(2) 長さ 1 の線分 $AB$ があるとき、黄金分割を与える $AB$ 上の点 $C$ を定規とコンパスで見つけよ。

(3) 黄金比は無理数であることを証明せよ。また、いくつか別の証明も考えてみよ。

(4) 次の問いに答えよ。
(a) 二等辺三角形 ABC において $AB = AC = \phi,\ BC = 1,\ \angle A = 36^\circ$ とするとき、$\phi$ を求めよ。
(b) 逆に二等辺三角形 ABC において $AB = AC = \phi$ ($\phi$ は (a) で得られた値) で $BC = 1$ とするとき、$\angle A$ を求めよ。

(5) 正五角形と、それに対角線をひいて出来た図形を考える。この図形の中の線分の比で黄金比になっている組を出来るだけ沢山見つけよ。

(6) 以下の問いに答えよ。
(a) 黄金比を連分数に展開してみよ。そのことによって問 (1) (b) をもう一度考えてみよう。
(b) $n$ を正の整数とするとき $\sqrt{n^2+1}$ の連分数展開を求めよ。
(c) $\sqrt{17}$ の近似値を小数点以下 3 位まで求めよ。
(d) $\alpha$ を連分数展開したら、$1, 2$ の繰り返しになったという、すなわち

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

となったとする。このような $\alpha$ はどういう数か？

(7) $n_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ は正の整数とするとき、

$$a_1 = n_1, \quad a_2 = n_1 + \frac{1}{n_2}, \quad a_3 = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3}}$$

$$a_4 = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4}}}$$

$$a_5 = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4 + \cfrac{1}{n_5}}}}$$

とおく。このとき、$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ の大小関係を見つけよ。

(8) 任意に正の整数の列 $n_1, n_2, n_3, \ldots,$ を与えたとき（有限で終わっても、無限に続いてもよい)、問 (1) において得られる小正方形の数の列がその列となるような数 $x$ が存在することを示せ。

(9) $\alpha = \sqrt[3]{2}$ とするとき、以下の問いに答えよ。
(a) $\alpha$ は無理数であることを証明せよ。
(b) $\alpha$ は 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c$ は整数) の解にはならないことを証明せよ。
(c) $\alpha$ の連分数表示を求めよ。