研究紹介 (應和 宏樹)

研究テーマ: 保存則方程式の解の存在とその解の性質について

1　はじめに

自然界に現れる波動現象の 1 次元的モデルである, 次の偏微分方程式を研究しています:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}f\big(u(x,t)\big)=0,\quad -\infty<x<\infty,\ t>0. \tag{1.1}$$

ここで, x は位置, t は時間, u は波の形を表す関数, f は波を動かす力の関数です. 方程式 (1.1) は保存則方程式と呼ばれ, 質量保存則, 運動量保存則, エネルギー保存則などと密接に関わっています. 一般的に, f という関数は自然界に現れる種々の波動現象に対応して与えられているため, 方程式 (1.1) を満たしている u (方程式 (1.1) の解) が存在するか (求められるか) どうかの議論は非常に大切だと言えます.

本研究紹介では, 高校までの数学の知識を仮定して保存則方程式における問題点について紹介していきます.

補足: $\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ と $\dfrac{\partial}{\partial x}f\big(u(x,t)\big)$ についての説明

ここで, 方程式 (1.1) に現れる $\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ と $\dfrac{\partial}{\partial x}f\big(u(x,t)\big)$ について簡単に説明します. $u(x,t)$ と $f\big(u(x,t)\big)$ は x,t の 2 つの変数に依存した関数です. このような関数を 2 変数関数といいます. 2 変数関数であっても, x,t のどちらかの変数を固定して 1 変数関数と見れば微分することができます. このような微分を偏微分といい,

$\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)$: x を固定して t に関して $u(x,t)$ を微分した関数

$\dfrac{\partial}{\partial x}f\big(u(x,t)\big)$: t を固定して x に関して $f\big(u(x,t)\big)$ を微分した関数

と表します.

2　保存則方程式の一例（線形波）

保存則方程式の 1 つの例として, $f(u) = u$ としたときの方程式 (1.1) の初期値問題

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (u_0(x):\ \text{微分可能な関数}) \tag{2.2}$$

の解を求めてみたいと思います. 初期値問題 (2.1), (2.2) とは「時間 $t = 0$ の波の形の関数を $u_0(x)$ と表したとき, t 秒後のその波の形の関数 $u(x,t)$ を方程式 (2.1) を解くことで求めなさい. 」という意味の問題です. ここでは, 説明を簡単にするために, t の単位を秒としたことに注意してください.

初期値問題 (2.1), (2.2) に解 u が存在すると仮定します. このとき, 任意に固定した (x,t) に対して点 (x,t) を通る曲線 (直線も含む)

$$(X(s), s) \quad \big(X(t) = x,\ s \geqq 0\big)$$

を考えてみましょう. その曲線上で $u(X(s),s)$ を s に関して微分すると, 2 変数関数の合成関数の微分公式から

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}u(X(s),s) &= \frac{\partial}{\partial x}u(X(s),s)\cdot\frac{dX(s)}{ds} + \frac{\partial}{\partial t}u(X(s),s)\cdot\frac{ds}{ds}\\ &= \frac{dX(s)}{ds}\cdot\frac{\partial}{\partial x}u(X(s),s) + \frac{\partial}{\partial t}u(X(s),s)\end{aligned} \tag{2.3}$$

と計算できます.

補足: 2 変数関数の合成関数の微分公式

関数 $g(x,t)$ に $x = \phi(s)$, $t = \psi(s)$ を代入した関数を s に関して微分すると

$$\frac{d}{ds}g(\phi(s),\psi(s)) = \frac{\partial}{\partial x}g(\phi(s),\psi(s))\cdot\frac{d\phi(s)}{ds} + \frac{\partial}{\partial t}g(\phi(s),\psi(s))\cdot\frac{d\psi(s)}{ds}$$

が成り立ちます. これが 2 変数関数の合成関数の微分公式です. ここで,

$\dfrac{\partial}{\partial x}g(\phi(s),\psi(s))$: t を固定して x に関して $g(x,t)$ を微分し, その関数に $x = \phi(s), t = \psi(s)$ を代入したもの

$\dfrac{\partial}{\partial t}g(\phi(s),\psi(s))$: x を固定して t に関して $g(x,t)$ を微分し, その関数に $x = \phi(s), t = \psi(s)$ を代入したもの

であることに注意してください. (2.3) を導く際に, この公式を使いました.

ここで, (2.1) と (2.3) を比較してみると, 仮に $X(s)$ を微分方程式

$$\frac{dX(s)}{ds} = 1, \quad X(t) = x \tag{2.4}$$

の解と決定するのであれば, (2.3) の右辺は (2.1) と同じ型になることがわかります. そこで, $X(s)$ を微分方程式 (2.4) の解とすると, u は初期値問題 (2.1), (2.2) の解であることから

$$\frac{d}{ds}u(X(s), s) = 0, \quad u(X(0), 0) = u_0(x_0) \quad (X(0) = x_0) \tag{2.5}$$

が成り立ちます. そして, (2.5) の左側の式を s に関して積分すると

$$u(X(s), s) = C \quad (C: \text{ 積分定数})$$

となり, $s = 0$ ととると $u(X(0), 0) = C$ であることから, $C = u_0(x_0)$ がわかります. したがって, 任意の $s \geqq 0$ に対して

$$u(X(s), s) = u_0(x_0) \tag{2.6}$$

となるので, (2.6) で $s = t$ ととると

$$u(x, t) = u_0(x_0) \tag{2.7}$$

が成り立ちます. 以上から, 初期値問題 (2.1), (2.2) の解は微分方程式 (2.4) を満たしている曲線 (解)$X(s)$ 上で (2.7) となることがわかります. そこで, 微分方程式 (2.4) を s について解いてみます. (2.4) の左側の式の両辺を s に関して積分すると

$$X(s) = s + C \quad (C: \text{ 積分定数})$$

となり, $s = t$ ととると $X(t) = t + C$ であることから, $C = x - t$ がわかります. したがって,

$$X(s) = s - t + x \tag{2.8}$$

となり, (2.8) で $s = 0$ ととると

$$x_0 = x - t \tag{2.9}$$

が成り立ちます. よって, 初期値問題 (2.1), (2.2) の解は

$$u(x, t) = u_0(x - t) \tag{2.10}$$

で与えられると期待されます. 実際, (2.10) を (2.1), (2.2) に代入すると, (2.10) は初期値問題 (2.1), (2.2) の解であることが確かめられます. 解 (2.10) は, $t = 0$ の波

が時間変化とともに同じ形のまま平行移動していくことから, 線形波と呼ばれています (図 1 を参照せよ).

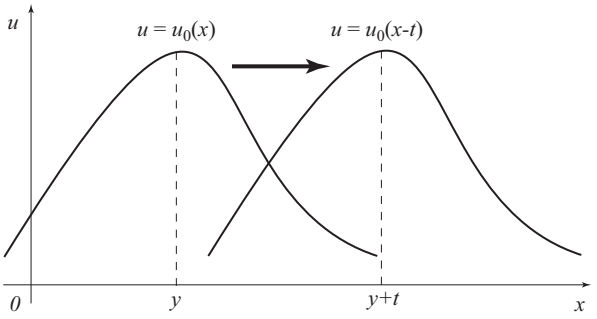

図 1: 線形波の概形

まとめ: 曲線 $X(s)$ の重要性

ここで, 曲線 $X(s)$ の重要性について説明します. 曲線 $X(s)$ は (2.8) を満たすような傾きが 1 の直線であり, グラフを描くと図 2 のようになります.

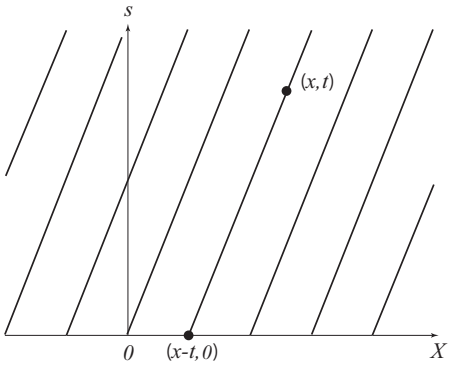

図 2: 曲線 $X(s)$ の概形

曲線 $X(s)$ のグラフを見ると, すべての点 (x,t) に対してその点を通る曲線 $X(s)$ が唯一つ存在します. (2.7) から初期値問題 (2.1), (2.2) の解は各曲線 $X(s)$ 上で初期条件 u_0 を用いて表すことができるので, すべての点 (x,t) に対してその点を通る曲線 $X(s)$ が 唯一つ存在する ということは “解の情報が唯一つ得られる” という意味で重要です. というのも, 仮に曲線 $X(s)$ が複数本通る点があるならば, その点での初期条件からの解の情報は重複してしまい, また, 仮に曲線 $X(s)$ が通らない点があるならば, その点での初期条件からの解の情報は存在しないことになるからです.

3　保存則方程式における問題点

次に, $f(u)=\dfrac{u^2}{2}$ としたときの方程式 (1.1) の初期値問題

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\big(u(x,t)\big)^2}{2}\right)=0,\quad -\infty<x<\infty,\ t>0, \tag{3.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad -\infty<x<\infty\quad (u_0(x):\ \text{微分可能な関数}) \tag{3.2}$$

を初期値問題 (2.1), (2.2) のときと同様にして考えてみたいと思います.

初期値問題 (3.1), (3.2) に解 u が存在すると仮定します. このとき, 合成関数の微分公式を用いると

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\big(u(x,t)\big)^2}{2}\right)=\frac{d}{du}\left(\frac{u^2}{2}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)=u(x,t)\cdot\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \tag{3.3}$$

と計算できるので, (3.1) は

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)+u(x,t)\cdot\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)=0 \tag{3.4}$$

と書き換えることができます.

補足: 合成関数の微分公式

(3.3) について, 少し補足をします. ここで,

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\big(u(x,t)\big)^2}{2}\right)$: t を固定して x に関して $\dfrac{\big(u(x,t)\big)^2}{2}$ を微分した関数

であることに注意してください. $t=a$ と固定した関数を $u=u(x,a)$ と表し, $\dfrac{\big(u(x,a)\big)^2}{2}$ を x に関して微分すると, 1 変数関数の合成関数の微分公式から

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\big(u(x,a)\big)^2}{2}\right)=\frac{d}{du}\left(\frac{u^2}{2}\right)\cdot\frac{d}{dx}u(x,a)=u(x,a)\cdot\frac{d}{dx}u(x,a)$$

と計算できます. このとき,

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\big(u(x,a)\big)^2}{2}\right)$: t を固定して x に関して $\dfrac{\big(u(x,t)\big)^2}{2}$ を微分した関数

$\dfrac{d}{dx}u(x,a)$: t を固定して x に関して $u(x,t)$ を微分した関数

を意味しているため, (3.3) が得られます.

任意に固定した (x,t) に対して点 (x,t) を通る曲線 (直線も含む) を

$$(X(s),s) \quad \big(X(t)=x,\ s \geqq 0\big)$$

とし, その曲線上で $u(X(s),s)$ を s に関して微分すると, 2 変数関数の合成関数の微分公式から

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}u(X(s),s) &= \frac{\partial}{\partial x}u(X(s),s)\cdot\frac{dX(s)}{ds}+\frac{\partial}{\partial t}u(X(s),s)\cdot\frac{ds}{ds}\\ &= \frac{dX(s)}{ds}\cdot\frac{\partial}{\partial x}u(X(s),s)+\frac{\partial}{\partial t}u(X(s),s) \qquad (3.5)\end{aligned}$$

と計算できます. ここで, (3.4) と (3.5) を比較してみると, 仮に $X(s)$ を微分方程式

$$\frac{dX(s)}{ds}=u(X(s),s), \quad X(t)=x \qquad (3.6)$$

の解と決定するのであれば, (3.5) の右辺は (3.4) と同じ型になることがわかります. そこで, $X(s)$ を微分方程式 (3.6) の解とすると, u は初期値問題 (3.1), (3.2) の解であることから

$$\frac{d}{ds}u(X(s),s)=0, \quad u(X(0),0)=u_0(x_0) \quad (X(0)=x_0) \qquad (3.7)$$

が成り立ちます. そして, (3.7) の左側の式を s に関して積分すると

$$u(X(s),s)=C \quad (C:\ \text{積分定数})$$

となり, $s=0$ ととると $u(X(0),0)=C$ であることから $C=u_0(x_0)$ がわかります. したがって, 任意の $s \geqq 0$ に対して

$$u(X(s),s)=u_0(x_0) \qquad (3.8)$$

となるので, (3.8) で $s=t$ ととると

$$u(x,t)=u_0(x_0) \qquad (3.9)$$

が成り立ちます. 以上から, 初期値問題 (3.1), (3.2) の解は微分方程式 (3.6) を満たしている曲線 (解)$X(s)$ 上で (3.9) となることがわかります. 微分方程式 (3.6) は (3.8) から

$$\frac{dX(s)}{ds}=u_0(x_0), \quad X(t)=x \qquad (3.10)$$

と書けるので, (3.10) の左側の式の両辺を s に関して積分すると

$$X(s)=u_0(x_0)s+C \quad (C:\ \text{積分定数})$$

となり, $s = t$ ととると $X(t) = u_0(x_0)t + C$ であることから, $C = x - u_0(x_0)t$ がわかります. したがって,

$$X(s) = u_0(x_0)(s - t) + x \tag{3.11}$$

となり, (3.11) で $s = 0$ ととると

$$x = x_0 + u_0(x_0)t \tag{3.12}$$

が成り立ちます. よって, (3.12) が x_0 について解けるのであれば, 初期値問題 (3.1), (3.2) の解は (3.9) で与えられると期待されます. しかし, 初期値問題 (2.1), (2.2) のときとは異なり, (3.12) は x_0 について必ずしも解けるとは限らないため, これでは初期値問題 (3.1), (3.2) が解けたとは言い切れません.

初期値問題 (2.1), (2.2) と初期値問題 (3.1), (3.2) で異なるのは曲線 $X(s)$ の傾きです. (3.9) から初期値問題 (3.1), (3.2) の解は各曲線 $X(s)$ 上で初期条件 u_0 を用いて表すことができます. このため, 初期値問題 (3.1), (3.2) の解を求めるためには, 点 $(x_0, 0)$ を通る曲線 $X(s)$ を考える必要があります. 点 $(x_0, 0)$ を通る曲線 $X(s)$ は (3.11) を満たすような傾きが $u_0(x_0)$ の直線であり, たとえば, 図 3 のようなグラフを描くことができます.

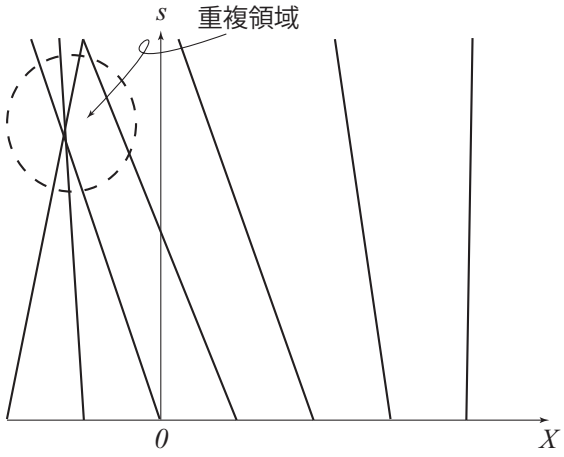

図 3: 点 $(x_0, 0)$ を通る曲線 $X(s)$ の概形

図 3 を見ると, すべての点 (x, t) に対してその点を通る直線が唯一つ存在するとは限りません. すなわち, 直線が複数本通る領域 (重複領域) が存在します. また, ここでは詳しく述べませんが, $u_0(x)$ の性質によっては直線が 1 本も通らない領域 (空白領域) が存在する場合もあります. この重複領域, 空白領域の存在が保存則方程式における大きな問題となっているのです.

まとめ: 保存則方程式における問題点

初期値問題 (3.1), (3.2) では, 次の 2 つの問題点が生じます:

(a) 点 $(x_0, 0)$ を通る曲線 $X(s)$ が複数本通る領域がある.

(b) 点 $(x_0, 0)$ を通る曲線 $X(s)$ が 1 本も通らない領域がある.

この 2 つの問題点を解決するために, 新しい解の概念と解法を考える必要が出てくるのです.

4 おわりに

上述の通り, 保存則方程式には 2 つの大きな問題点が生じます. このため, 保存則方程式には解 (正確には, 微分可能な解) が存在するとは限りません. したがって, 物理的要請に基づくように解の概念を拡張し, その解に対応した解法を考える必要があります.

最後に, より詳しく保存則方程式について知りたいという方に向けて, 参考文献 [1], [2] を紹介しておきます.

参考文献

[1] 竹野 茂治 (2002)『非線形偏微分方程式入門 –1 次元移流方程式を使って–』<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/pdetutor/pdetutor.pdf> (2011 年 10 月 24 日アクセス).

[2] 松村 昭考, 西原 健二 (2004)『非線形微分方程式の大域解 –圧縮性粘性流の数学解析–』日本評論社 (数理物理シリーズ).