はじめに　(線形代数 IIA)

線形代数 II　＝　線形代数 I のつづき

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

5.4　行列の相似性

定理 5

V：線形空間，$\dim(V) < \infty$. $T : V \to V$：V 上の 1 次変換，
A：V の基底 B に関する T の行列，A'：V の基底 B' に関する T の行列
$\Rightarrow A' = P^{-1}AP$. 但し，$[\mathbb{x}]_B = P[\mathbb{x}]_{B'}$. ($P$ は B' から B への変換行列)

(証明) $A\mathbb{u} = \mathbb{v}$ を $\mathbb{u} \xrightarrow{A} \mathbb{v}$ とかくと，(可換図式とよばれる) 次をえる：

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{x}]_B & \xrightarrow{A} & [T(\mathbb{x})]_B \\ {\scriptstyle P}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle P^{-1}} \\ [\mathbb{x}]_{B'} & \xrightarrow[P^{-1}AP]{A'} & [T(\mathbb{x})]_{B'}. \end{array}$$

$\therefore\ A'[\mathbb{x}]_{B'} = P^{-1}AP[\mathbb{x}]_{B'}$.
$\mathbb{x} \in V$ は任意であるから，$B' = \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$ に対して，$\mathbb{x} = \mathbb{v}_i$ とすれば，$[\mathbb{v}_i]_{B'} = \mathbb{e}_i$ (標準単位ベクトル).
$\therefore\ A' = P^{-1}AP$. □

定義 (対角行列)

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$ を対角行列という. (対角 ••• diagonal)

定義 (相似)

A, A' : 正方行列.

A' は A に相似 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists P$ s.t. $A' = P^{-1}AP$. (相似 ••• similar)

A は A' に相似のとき, $A \sim A'$ とかく.

注意

相似 ($\sim$) は同値関係, i.e. $A \sim A$ (反射律), $A \sim A' \Rightarrow A' \sim A$ (対称律), $A \sim A', A' \sim A'' \Rightarrow A \sim A''$ (推移律) をみたす. ($\because$ 各自考える)

$\longrightarrow$ $n \times n$ 行列全体はいくつかの同値類に類別 (クラス分け) される.

例

$V = \mathbb{R}^2$, $T = T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

$B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$P = ([\mathbf{u}_1]_B \ [\mathbf{u}_2]_B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ であるから,

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\therefore$ $A \sim A'$ (相似). (A は基底変換によって対角行列 A' とできる)

注意

定理 5 より「$T : V \to V$ を表す行列は (基底変換によって) 相似」

定義 (固有値，固有ベクトル)

A：$n \times n$ 行列.
$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ をみたす $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{o})$ を A の (λ に対する) 固有ベクトル,
$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の固有値という.
(固有ベクトル ⋯ eigenvector，固有値 ⋯ eigenvalue)

例

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は A の固有値 3 に対する固有ベクトル.

問

A の固有値は (いくつ) 存在するか？

$\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\,\mathbb{x} = \lambda\,\mathbb{x}$

$\Leftrightarrow \exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $(\lambda I - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}$

$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ をみたす.

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 1, 2$ (のみ). $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$

$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0.$

例

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値はなし. $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$

$= \det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0$ より解なし.

例

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を (すべて) 求めよ.

A の固有値は $\lambda = 4, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$. $\because$ A の固有方程式 $\det(\lambda I - A)$

$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -3 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda + 17\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0.$

注意

A : $n \times n$ 行列 $\Rightarrow$ A の固有値は n 個以下.

- まとめると …

定理 1

A：$n \times n$ 行列．次は同値：
(a) λ は A の固有値；
(b) $(\lambda I - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は自明でない解 $\mathbb{x} \neq \mathbb{o}$ をもつ；
(c) $\exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n\ (\mathbb{x} \neq \mathbb{o})$ s.t. $A\,\mathbb{x} = \lambda\,\mathbb{x}$;
(d) λ は固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ の実数解.

定義 (固有空間)

$W_\lambda = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda I - A)\mathbb{x} = \mathbb{o}\} \subset \mathbb{R}^n$：解空間を
A の固有値λ に対する固有空間という.

- $W_\lambda = \{A$ の λ に対する固有ベクトル $\} \cup \{\mathbb{o}\}$

注意

固有値，固有ベクトル，固有空間は一般の $V \neq \mathbb{R}^n$ に対して定義できる.
(教 pp. 292〜293)

例

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の (各固有値に対する) 固有空間を求めよ.

A の固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0 \text{ より},$$

A の固有値は $\lambda = 1, 5$ (2 重根).

$$W_\lambda = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ より},$$

$$W_1 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{各自}}{=} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

$$W_5 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{各自}}{=} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \mathbf{x} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (s, t \in \mathbb{R}) \right\}.$$

$\therefore$ $\dim(W_1) = 1$, $\dim(W_5) = 2$. (1 次独立な固有ベクトルが 2 つある!)