はじめに　(線形代数 IIA)

線形代数 II　＝　線形代数 I のつづき

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

4.2　線形空間

注意

教科書では「線型」を使っているが，この授業では「線形」を使う．
「線型空間」$\longrightarrow$「線形空間」

V：集合
n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$　　$\rightsquigarrow$　　V：線形空間
一般化

注意

$\exists!$ は「一意的 (ただ一つ) に存在」($\exists 1$ も同様)
$\exists$〜s.t. $\cdots$ の s.t. は such that の略で $\cdots$ をみたすような

定義 (線形空間 V)　[$\mathbb{C}$ 上や体 K 上もあるがこの授業では扱わない]

V：集合，$\forall \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in V$, $\forall k, l \in \mathbb{R}$ が次の 10 個の公理をみたすとき，V を ($\mathbb{R}$ 上の)線形空間，元 $\mathrm{u} \in V$ をベクトルという．

公理 1. $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$, 和 $\mathrm{u} + \mathrm{v} \in V$ が定義されている．

2. $\mathrm{u} + \mathrm{v} = \mathrm{v} + \mathrm{u}$　(交換法則)
3. $\mathrm{u} + (\mathrm{v} + \mathrm{w}) = (\mathrm{u} + \mathrm{v}) + \mathrm{w}$　(結合法則)
4. $\exists! \mathfrak{o} \in V$ s.t. $\mathrm{u} + \mathfrak{o} = \mathfrak{o} + \mathrm{u} = \mathrm{u}$
5. $\forall \mathrm{u} \in V$ $\exists! - \mathrm{u} \in V$ s.t. $\mathrm{u} + (-\mathrm{u}) = (-\mathrm{u}) + \mathrm{u} = \mathfrak{o}$

($\mathfrak{o}$ をゼロ・ベクトル，$-\mathrm{u}$ を u の逆元という)

公理 6. $\mathrm{u} \in V$, $k \in \mathbb{R}$, スカラー倍 $k\,\mathrm{u} \in V$ が定義されている．

7. $k(\mathrm{u} + \mathrm{v}) = k\,\mathrm{u} + k\,\mathrm{v}$　(分配法則 1)
8. $(k + l)\mathrm{u} = k\,\mathrm{u} + l\,\mathrm{u}$　(分配法則 2)
9. $k(l\,\mathrm{u}) = (kl)\mathrm{u}$
10. $1 \cdot \mathrm{u} = \mathrm{u}$

注意

$\mathbb{R}^n$ は公理 1〜10 をみたし線形空間．(ほかにも色々な線形空間がある)

例

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$　原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面は線形空間．((a, b, c) と直交する平面 $(a, b, c) \bullet (x, y, z) = 0$)

$\because \mathbb{R}^3$ は線形空間であり，$V \subset \mathbb{R}^3$ より V は公理 2,3,7,8,9,10 をみたす．
($\mathbb{R}^3$ 全体で成立)

(公理 1) $\mathbb{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbb{v} = (v_1, v_2, v_3) \in V$
$\Rightarrow au_1 + bu_2 + cu_3 = 0,\ av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$
$\Rightarrow a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) = 0$
$\Rightarrow \mathbb{u} + \mathbb{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \in V$.
(公理 4) $\mathbb{o} = (0, 0, 0) \in V$.
(公理 5) $-\mathbb{u} = (-u_1, -u_2, -u_3) \in V$.
($\because au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \Rightarrow a(-u_1) + b(-u_2) + c(-u_3) = 0$)
(公理 6) $k\mathbb{u} = (ku_1, ku_2, ku_3) \in V$.
($\because au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \Rightarrow a(ku_1) + b(ku_2) + c(ku_3) =$
$k(au_1 + bu_2 + cu_3) = k \cdot 0 = 0$).

例

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = at, y = bt, z = ct\,(t \in \mathbb{R})\}$　原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線は線形空間.

$\because$ 省略．上の例と同様．(各自考えてみる)

例

$V = M_{m,n} = \{$ 実数成分の $m \times n$ 行列 $\}$ は線形空間.

$\because$ 和：行列の和，ゼロ・ベクトル：零行列 $\mathbf{O}$,
逆元：A の逆元は $-A$，スカラー倍：行列のスカラー倍 kA.

例

$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$　$\mathbb{R}$ 上の実数値関数全体は線形空間.

$\because$ 和：$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, ゼロ・ベクトル：$f = 0$,
逆元：f の逆元は $-f$, スカラー倍：$(kf)(x) := k\,f(x)$.

例

$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ は線形空間でない.
$\because (1,1) \in V$ だが逆元 $-(1,1) = (-1,-1) \notin V$.

例

$V = \{\mathrm{O}\}$　ゼロ・ベクトルからなる 1 点集合は線形空間.
例えば, $V = \{(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

例

$V = \{$ 実数列 $\{a_n\}\}$　実数列全体は線形空間.
$\because a = \{a_n\}, b = \{b_n\}$ に対して,
和 : $a + b := \{a_n + b_n\}$, ゼロ・ベクトル : $\{0\} = \{0, 0, 0, \cdots\}$,
逆元 : a の逆元は $-a := \{-a_n\}$, スカラー倍 : $ka := \{ka_n\}$.

例

$V = \mathbb{R}[X] = \{f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}, n \geq 0\}$　実数係数の1変数多項式全体は線形空間.

$\because$ 和：多項式の和 $f + g$，ゼロ・ベクトル：$0 \in \mathbb{R}$,
逆元：f の逆元は $-f$, スカラー倍：$kf \in V$.

例

$V = \mathbb{R}[X]_n = \{f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$　n 次以下の実数係数の1変数多項式全体は線形空間.

$\because$ 和：多項式の和 $f + g$，ゼロ・ベクトル：$0 \in \mathbb{R}$,
逆元：f の逆元は $-f$, スカラー倍：$kf \in V$.

- 教 pp.161〜163 の練習問題 4.2 を各自やってみる

定理 3

V：線形空間，$\mathfrak{u} \in V$, $k \in \mathbb{R}$.
$(a)\ 0 \cdot \mathfrak{u} = \mathfrak{o}$.　$(b)\ k \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{o}$.　$(c)\ (-1) \cdot \mathfrak{u} = -\mathfrak{u}$.
$(d)\ k \cdot \mathfrak{u} = \mathfrak{o} \Rightarrow k = 0$ または $\mathfrak{u} = \mathfrak{o}$.

(証明) (公理 1 から公理 10 のみを用いて示す)
$(a)\ 0 \cdot \mathfrak{u} + 0 \cdot \mathfrak{u} \underset{\text{公理 8}}{=} (0+0) \cdot \mathfrak{u} = 0 \cdot \mathfrak{u}$. 公理 5 より $0 \cdot \mathfrak{u}$ の逆元 $-0 \cdot \mathfrak{u}$ が存在し，両辺に足すと $(0 \cdot \mathfrak{u} + 0 \cdot \mathfrak{u}) + (-0 \cdot \mathfrak{u}) = 0 \cdot \mathfrak{u} + (-0 \cdot \mathfrak{u}) \underset{\text{公理 3,5}}{\Rightarrow}$
$0 \cdot \mathfrak{u} + (0 \cdot \mathfrak{u} + (-0 \cdot \mathfrak{u})) = \mathfrak{o} \underset{\text{公理 5}}{\Rightarrow} 0 \cdot \mathfrak{u} + \mathfrak{o} = \mathfrak{o} \underset{\text{公理 4}}{\Rightarrow} 0 \cdot \mathfrak{u} = \mathfrak{o}$.
$(b)\ k \cdot \mathfrak{o} \underset{\text{公理 4}}{=} k \cdot (\mathfrak{o} + \mathfrak{o}) \underset{\text{公理 7}}{=} k \cdot \mathfrak{o} + k \cdot \mathfrak{o}$. よって公理 5 より，$k \cdot \mathfrak{o}$ の逆元 $-k \cdot \mathfrak{o}$ をとれば (a) と同様．$(c)\ \mathfrak{u} + (-1) \cdot \mathfrak{u} \underset{\text{公理 10}}{=} 1 \cdot \mathfrak{u} + (-1) \cdot \mathfrak{u}$
$\underset{\text{公理 8}}{=} (1-1) \cdot \mathfrak{u} = 0 \cdot \mathfrak{u} \underset{\text{(a)}}{=} \mathfrak{o}$. よって，$-\mathfrak{u} = (-1) \cdot \mathfrak{u}$.
(d) (背理法) $k \neq 0$ かつ $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{o}$ を仮定．$k \cdot \mathfrak{u} = \mathfrak{o}$ の両辺に $\frac{1}{k}$ をかけて，
(左辺) $\frac{1}{k}(k \cdot \mathfrak{u}) \underset{\text{公理 9}}{=} 1 \cdot \mathfrak{u} \underset{\text{公理 10}}{=} \mathfrak{u}$
(右辺) $\frac{1}{k} \cdot \mathfrak{o} \underset{\text{(b)}}{=} \mathfrak{o}$. よって $\mathfrak{u} = \mathfrak{o}$ となり矛盾. □