はじめに　(線形代数 IIA)

線形代数 II　＝　線形代数 I のつづき

教科書　「やさしい線形代数，H．アントン著，山下純一訳」現代数学社

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと．
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ の列空間 $C(A)$ の基底を構成せよ.

前回の行空間 $R(A)$ に対して，行 $\leftrightarrow$ 列とする．(転置する)

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (行基本変形で ガウス行列に)

$\therefore$ $(1,3,0), (0,1,2)$: $R(A^t)$ の基底 (前回の定理 11 より)

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : C(A) \text{ の基底}$$

定理 12

$\dim R(A) = \dim C(A)$.

(証明) $R(A) = \mathrm{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_m\}$ の基底を $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_l$ $(\mathbb{b}_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in}))$ とすれば,

$$\begin{cases} \mathbb{r}_1 = c_{11}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{1l}\mathbb{b}_l \\ \quad \vdots \\ \mathbb{r}_m = c_{m1}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{ml}\mathbb{b}_l. \end{cases}$$

つまり, $1 \leq \forall j \leq n$ に対して,

$$\begin{cases} a_{1j} = c_{11}b_{1j} + \cdots + c_{1l}b_{lj} \\ \quad \vdots \\ a_{mj} = c_{m1}b_{1j} + \cdots + c_{ml}b_{lj} \end{cases}$$

であり,

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = b_{1j}\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + b_{lj}\begin{pmatrix} c_{1l} \\ \vdots \\ c_{ml} \end{pmatrix}$$

より, $\dim C(A) \leq \dim R(A) = l$.

以上の議論を $A \to A^t$ とすれば,

$\dim R(A) = \dim C(A^t) \leq \dim R(A^t) = \dim C(A)$.

$\therefore$ $\dim R(A) = \dim C(A)$. □

定義 (階数)

$\dim R(A)$ $(= \dim C(A))$ を行列 A の階数といい，$\mathrm{rank}(A)$とかく．

注意

行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ とは，A を行基本変形してガウス行列にしたときの階段の数(先頭の 1，初 1 の個数) に等しい．

定理 13

A：$n \times n$ 行列．次の (a)〜(h) は同値：
(a) A は可逆 (正則)；
(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ 以外の解をもたない；
(c) A と単位行列 I_n は行同値；
(d) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は任意の $\mathbb{b}$ について解をもつ；
(e) $\det(A) \neq 0$;
(f) $\mathrm{rank}(A) = n$;
(g) A の行ベクトル $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は 1 次独立；
(h) A の列ベクトル $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立；
(c') A を行基本変形で既約ガウス行列にすると単位行列 I_n となる．

既約ガウス行列 ••• 先頭の 1 の上下が全て 0. $(c) \Leftrightarrow (c')$ は OK.

(証明) $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$ は OK. (1.7 節，定理 13，教 p.65)
$(a) \Leftrightarrow (e)$ も OK. (2.3 節，定理 6，教 p.91)
よって，$(c) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (g) \Leftrightarrow (h)$ を示せばよい.
以下，$(c) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (h) \Rightarrow (c')$ の順に示す.

$(c) \Rightarrow (f)$：$A \to \cdots \to I_n$ (行基本変形)
$\Rightarrow \dim R(A) = n \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n.$

$(f) \Rightarrow (g)$：$\operatorname{rank}(A) = n$
$\Leftrightarrow \dim R(A) = n \Rightarrow R(A) = \operatorname{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n\}$ より $\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は $R(A)$ の基底 ($\because$ 定理 9(b)) $\Rightarrow \mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$：1 次独立.

$(g) \Rightarrow (h)$：$\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$：1 次独立
$\Rightarrow \mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n$ は $R(A) = \operatorname{Span}\{\mathbb{r}_1, \ldots, \mathbb{r}_n\}$ の基底 $\Rightarrow \dim R(A) = n$
$\Rightarrow \dim C(A) = n$ ($\because$ 定理 12)
$\Rightarrow C(A) = \operatorname{Span}\{\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n\}$ で $\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立.

$(h) \Rightarrow (c')$：$\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は 1 次独立
$\Rightarrow \mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n$ は $C(A) = \operatorname{Span}\{\mathbb{c}_1, \ldots, \mathbb{c}_n\}$ の基底 $\Rightarrow \dim C(A) = n$
$\Rightarrow \dim R(A) = n$ ($\because$ 定理 12) $\Rightarrow A$ の既約ガウス行列の行ベクトルはすべて $\mathbb{0}$ でなく，既約ガウス行列は I_n に等しい. □

定理 14

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbb{b} \in C(A)$.

(証明) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

よって，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathbb{b} \in C(A)$. □

- 教 pp.196〜198 の練習問題 4.6 を各自やってみる