はじめに　(数学基礎 B1)

数学基礎 B　＝　**線形代数**

教科書「要点明解　線形数学　三訂版」培風館

(第１章　ベクトル)
- **第２章　行列**
- 第３章　連立１次方程式

(第４章　行列式)

(第５章　行列の対角化)

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと.
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

定義 (正則行列，逆行列)

A：n 次正方行列，E_n：n 次単位行列.

$$AB = BA = E_n \cdots (1)$$

なる n 次正方行列 B が存在するとき，A を n 次**正則行列**という．このとき，(1) をみたす行列 B を A の**逆行列**といい，$B = A^{-1}$ とあらわす.

注意

A が**正則行列**のとき，**逆行列** A^{-1} は**ただ１つ**存在する.

$\because$ $AB = BA = E_n$ ⋯ (1)

$AB' = B'A = E_n$ ⋯ (2)

$\Rightarrow B = BE_n \underset{(2)}{=} B(AB') \underset{\text{結合法則}}{=} (BA)B' \underset{(1)}{=} E_nB' = B'$ より $B = B'$ □

例

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc \neq 0$ のとき,

A は**正則行列**で**逆行列** $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

($\because$ 実際，各自確かめてみる)

例

$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $ad - bc = -10 + 21 = 11 \neq 0$ より,

A は**正則行列**で $A^{-1} = \dfrac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

注意

後に，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: **正則行列** $\iff$ $ad - bc \neq 0$ を示す．($(\Leftarrow)$ は OK)

また，$n \times n$ 行列 $(n \geq 3)$ がいつ正則行列となるかは，今後学んでいく．

例 (逆行列 A^{-1} の応用)

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

は $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を用いて，$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ とかける．この両辺に**逆行列** $A^{-1} = \dfrac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ をかけると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

他の解 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ がないことは，**逆行列** A^{-1} の**一意性 (1 つしかないこと)** からわかる．

定理 2.4

(1) A：n 次**正則行列** $\Rightarrow$ A^{-1}：n 次**正則行列**であり，

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(2) A, B：n 次**正則行列** $\Rightarrow$ AB, BA は n 次**正則行列**であり，

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}. \quad (\underline{\text{順番}}\text{に注意})$$

注意

実際，$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n$.
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = E_n$ も同様. $\therefore$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.3　いろいろな行列

定義 (A^n)

A：正方行列.
$A^2 := AA$, $A^3 := AAA, \ldots, A^n := A \cdots A$ (n 個). A の n 乗という.
$A^0 := E$ (単位行列), $A^1 := A$ とする.

定義 (A^{T})　　[転置 ··· transposed]

$A = (a_{ij})$：$m \times n$ 行列.
$A^{\mathrm{T}} := (a_{ji})$：$n \times m$ 行列を A の転置行列という. **(行 $\leftrightarrow$ 列)**

例

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = (1\ 3\ 5), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

例 (内積，直交する)

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathrm{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{y} = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 : \underline{\mathrm{x}\text{ と }\mathrm{y}\text{ の内積}}.$$

x と y が**直交する** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{y} = 0$.

例

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{y} = \begin{pmatrix} a \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{y} = (a\ \ a\ \ 1)\begin{pmatrix} a \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2)\text{ であり},$$

x と y が**直交する** $\Longleftrightarrow$ $a = 1$ または $a = 2$.

例

$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$.

$\because A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} = (a_{ji}) + (b_{ji}) = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ij} + b_{ij})^{\mathrm{T}} = (A+B)^{\mathrm{T}}$.

例

$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$. (順番に注意)

$\because A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ とすると, $AB = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk})$ より,

AB の (i,k) 成分 $= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = (AB)^{\mathrm{T}}$ の (k,i) 成分

$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} a_{ij} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$ の (k,i) 成分.

例

A：**正則行列** $\Rightarrow$ A^{T}：**正則行列**.

$\because$ 実際, $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$ となる：

$$A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{-1} = A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} \underset{\text{上の例}}{=} (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = E_n^{\mathrm{T}} = E_n.$$

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1}A^{\mathrm{T}} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \underset{\text{上の例}}{=} (AA^{-1})^{\mathrm{T}} = E_n^{\mathrm{T}} = E_n.$$

定義 (対称行列，交代行列)

A：正方行列.

A：**対称行列** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A^{\mathrm{T}} = A$.

A：**交代行列** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A^{\mathrm{T}} = -A$.

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = A^{\mathrm{T}} \text{ より，} A \text{ は対称行列.}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = -B^{\mathrm{T}} \text{ より，} B \text{ は交代行列.}$$