はじめに　(数学基礎 B1)

数学基礎 B　＝　**線形代数**

教科書「要点明解　線形数学　三訂版」培風館

(第１章　ベクトル)
- 第２章　行列
- **第３章　連立１次方程式**

(第４章　行列式)

(第５章　行列の対角化)

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと.
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

連立 1 次方程式を解く.

$$\textbf{(3)} = (1) - 2 \times (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 5y & = & 3 \cdots (1) \\ 2x + 3y & = & 1 \cdots (2) \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -y & = & 1 \cdots \textbf{(3)} \\ 2x + 3y & = & 1 \cdots (2) \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \cdots (2) \\ -y & = & 1 \cdots \textbf{(3)} \end{array} \right.$$

$$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & 4 \cdots \textbf{(4)} \\ -y & = & 1 \cdots \textbf{(3)} \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & 4 \cdots \textbf{(4)} \\ y & = & -1 \cdots (5) \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 \cdots (6) \\ y & = & -1 \cdots (5) \end{array} \right.$$

$$\textbf{(4)} = (2) + 3 \times \textbf{(3)} \qquad (5) = (-1) \times \textbf{(3)} \qquad (6) = \frac{1}{2} \times \textbf{(4)}$$

連立 1 次方程式を解く.

$$\textbf{(3)} = (1) - 2 \times (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 5y &=& 3 \cdots (1) \\ 2x + 3y &=& 1 \cdots (2) \end{array} \right. \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \left\{ \begin{array}{rcl} -y &=& 1 \cdots \textbf{(3)} \\ 2x + 3y &=& 1 \cdots (2) \end{array} \right. \xrightarrow{\boxed{\text{I}}} \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y &=& 1 \cdots (2) \\ -y &=& 1 \cdots \textbf{(3)} \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \left\{ \begin{array}{rcl} 2x &=& 4 \cdots \textbf{(4)} \\ -y &=& 1 \cdots \textbf{(3)} \end{array} \right. \xrightarrow{\boxed{\text{II}}} \left\{ \begin{array}{rcl} 2x &=& 4 \cdots \textbf{(4)} \\ y &=& -1 \cdots (5) \end{array} \right. \xrightarrow{\boxed{\text{II}}} \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 2 \cdots (6) \\ y &=& -1 \cdots (5) \end{array} \right.$$

$$\textbf{(4)} = (2) + 3 \times \textbf{(3)} \qquad (5) = (-1) \times \textbf{(3)} \qquad (6) = \tfrac{1}{2} \times \textbf{(4)}$$

I. 2 つの行を交換
II. ある行を k 倍 $(k \neq 0)$
III. ある行の k 倍を他の行に加える

(行) 基本変形　(前回)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{\text{I}}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ \textbf{0} & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\boxed{\text{III}}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & \textbf{0} & 4 \\ \textbf{0} & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{\text{II}}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & \textbf{0} & 4 \\ \textbf{0} & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\boxed{\text{II}}} \left(\begin{array}{cc|c} \textbf{1} & \textbf{0} & 2 \\ \textbf{0} & \textbf{1} & -1 \end{array} \right)$$

注意

連立 1 次方程式を解く

$\overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow}$

(行) 基本変形 I, II, III をくり返して $\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & a \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & b \end{array}\right)$ の形にする.

すなわち，左側を単位行列 $E_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ にする.

このとき，連立 1 次方程式の解 $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ がえられる.

例

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \downarrow \times(-2) \xrightarrow{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ \mathbf{0} & -3 & -3 & -15 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \downarrow \times(-3) \xrightarrow{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ \mathbf{0} & -1 & -5 & -17 \end{array}\right) \times(-\tfrac{1}{3})$$

$$\xrightarrow{\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -17 \end{array}\right) \downarrow \times 1 \xrightarrow{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{0} & -4 & -12 \end{array}\right) \uparrow \times(-1) \xrightarrow{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \mathbf{0} & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right) \times(-\tfrac{1}{4})$$

$$\xrightarrow{\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right) \uparrow \times(-1) \xrightarrow{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \uparrow \times(-1) \xrightarrow{\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

注意

行基本変形 I, II, III は**１つずつ行うこと … コツコツ**やりましょう
例えば，１行目を３行目に加え，同時に３行目を１行目に加えると，
１行目も３行目も同じになります．が，**間違っています．**

注意

行基本変形を行うこと．　**列ではダメ．**

注意

行基本変形 $\longrightarrow$ は逆に戻ることもできる．$(\longleftrightarrow)$
ここから $\longrightarrow$ の最初と最後の解は**完全に一致している**ことがわかる．
行ったり来たり $(\longleftrightarrow)$ できることが重要．
片向き $\longleftarrow, \longrightarrow$ だと**全ての解をもれなくぴったり求めた**とは言えない．

- 左側を必ず単位行列 E_n にできるわけではない．
  これは，解が１つ (1 組) のときにおこる．
  しかし，解がないときも，解が無数にあるときもある．一般には …

3.2　掃き出し法

定理

全ての $m \times n$ 行列は (行) 基本変形を何回か行って次の形に変形できる：



注意

(1) 各行を左から見ていくと，0 でない最初の数は 1.
この 1 を**初１ (はついち)** という.
(2) 上の行の初１は下の行の初１より左にある.
つまり，階段になっている.
(3) 初１の上下は全て 0.

この (1), (2), (3) をみたす行列を**ガウス行列**という.