はじめに　(数学基礎 B2)

数学基礎 B　＝　**線形代数**

教科書　「要点明解 線形数学」培風館

(第 1 章　ベクトル)
(第 2 章　行列)
(第 3 章　連立 1 次方程式)
- **第 4 章　行列式**
- 第 5 章　行列の対角化

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと.
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

4.3　行列式の展開

定理 4.9 (重要)

n 次正方行列 A, B に対して，$|AB| = |A|\,|B|$.

例

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} |AB| &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ &= \cancel{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + \cancel{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}} \\ &\quad \cancel{+a_{11}b_{12}a_{21}b_{11}} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} \cancel{+a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = |A|\,|B|. \end{aligned}$$

注意

一般に，$|A + B| \neq |A| + |B|$. 例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |A| + |B| = 1 + 1 = 2 \neq 0 = |A + B|$.

定義 (余因子)

$A = (a_{ij})$：n 次正方行列.

$\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ を A の(i,j) 余因子という.

但し,

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & /// & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & /// & \vdots & & \vdots \\ /// & /// & /// & /// & /// & /// & /// \\ \vdots & & \vdots & /// & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & /// & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(A_{ij} は A から第 i 行と第 j 列を取り除いた $(n-1) \times (n-1)$ 行列)

注意

行列式の定義より，$|A| = a_{11}\widetilde{a}_{11} + \cdots + a_{1n}\widetilde{a}_{1n}$.　　より一般に …

定理 4.10

$A = (a_{ij})$：n 次正方行列.

$$(1)\quad a_{i1}\widetilde{a}_{j1} + \cdots + a_{in}\widetilde{a}_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\widetilde{a}_{jk} = \begin{cases} |A| & (i = j) \\ 0 & (i \neq j); \end{cases}$$

$$(2)\quad a_{1i}\widetilde{a}_{1j} + \cdots + a_{ni}\widetilde{a}_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\widetilde{a}_{kj} = \begin{cases} |A| & (i = j) \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

- (1) で $i = j$ のとき，$|A| = a_{i1}\widetilde{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\widetilde{a}_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\widetilde{a}_{ik}$ を
  第 i 行に関する $|A|$ の余因子展開という.
  ($i = 1$ のとき，$|A|$ の定義そのもの)
- (2) で $i = j$ のとき，$|A| = a_{1i}\widetilde{a}_{1i} + \cdots + a_{ni}\widetilde{a}_{ni} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\widetilde{a}_{ki}$ を
  第 i 列に関する $|A|$ の余因子展開という.

例 ($n = 3$) 定理 4.10 (1)

$i = j = 1$. 第 1 行に関する $|A|$ の余因子展開.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

($i = 1$ のとき, $|A|$ の定義そのもの)

$i = j = 2$. 第 2 行に関する $|A|$ の余因子展開.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$i = j = 3$. 第 3 行に関する $|A|$ の余因子展開.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

例 ($n = 3$) 定理 4.10 (2)

$i = j = 1$. 第 1 列に関する $|A|$ の余因子展開.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

$i = j = 2$. 第 2 列に関する $|A|$ の余因子展開.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

$i = j = 3$. 第 3 列に関する $|A|$ の余因子展開.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

定義 (余因子行列)

$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ji})$ をA の余因子行列という. $\cdots$ $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})^{\mathrm{T}}$ (転置) に注意

定理 4.10 (1), (2) を行列であらわすと $\cdots$

$$A\widetilde{A} \underset{(1)}{=} \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A|\,E_n \underset{(2)}{=} \widetilde{A}A. \quad \text{これより,}$$

定理 4.11 (重要)

A : n 次正方行列.

(1) A : 正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;

(2) A : 正則 $\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$.

$\because$ A : 正則 $\Rightarrow AA^{-1} = E_n \Rightarrow |A|\,|A^{-1}| \underset{4.9}{=} |AA^{-1}| = 1$ より, $|A| \neq 0$.

$|A| \neq 0 \Rightarrow A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|\,E_n \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$ で A は正則. (2) も OK.

例

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. A の (i,j) 余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ は,

$\widetilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}| = +|a_{22}| = a_{22}$, $\widetilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}|a_{21}| = -|a_{21}| = -a_{21}$,
$\widetilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}|a_{12}| = -|a_{12}| = -a_{12}$, $\widetilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}|a_{11}| = +|a_{11}| = a_{11}$.

$$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ji}) = (\widetilde{a}_{ij})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

定理 4.11 より，A：正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

$$|A| \neq 0 \text{ のとき，} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

··· 第 2 章の内容と一致している

- 各自，第 4 章の章末問題 (教 p.91) をやっておく！

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. A の (i,j) 余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ は,

$$\widetilde{a}_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2,\ \widetilde{a}_{12} = - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ \widetilde{a}_{13} = + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\widetilde{a}_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ \widetilde{a}_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,\ \widetilde{a}_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\widetilde{a}_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ \widetilde{a}_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2,\ \widetilde{a}_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ji}) = (\widetilde{a}_{ij})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{31} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{32} \\ \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = a_{11}\widetilde{a}_{11} + a_{12}\widetilde{a}_{12} + a_{13}\widetilde{a}_{13} = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = -4.$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$