はじめに　(数学基礎 B2)

数学基礎 B　＝　**線形代数**

教科書　「要点明解 線形数学」培風館

(第１章　ベクトル)
(第２章　行列)
(第３章　連立１次方程式)
- 第４章　行列式
- **第５章　行列の対角化**

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと.
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

命題

A：n 次正方行列，$f_A(t) = |tE - A|$：A の固有多項式とする．

(1) $f_{P^{-1}AP}(t) = f_A(t)$;

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n).$

$\because$ (1) $|AB| = |A||B|$ と $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ より，$f_{P^{-1}AP}(t) = |tE - P^{-1}AP|$

$= |P^{-1}(tE - A)P| = |P^{-1}|\,|tE - A|\,|P| = \dfrac{1}{|P|}|tE - A||P| = |tE - A|$

$= f_A(t)$．(2) も (1) より OK.

- A が対角化可能 $\Rightarrow f_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_k)^{n_k}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$：重複なし)
  ($f_A(t) = 0$ は (重複度込みで) n 個の実数解をもつ：$n = n_1 + \cdots + n_k$)
- 逆に，各固有値 λ_i に対して，$(A - \lambda_i E)\,\mathfrak{p}_{i,j} = \mathfrak{o}$ なる固有ベクトル $\mathfrak{p}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{p}_{i,n_i}$ が λ_i の重複度分 n_i 個存在して，各 $\mathfrak{p}_{i,j}$ を並べた行列 P が正則 ($|P| \neq 0$) ならば，A は対角化可能.

定理 5.2

A：n 次正方行列，$f_A(t) = |tE - A|$：A の固有多項式とする．
$f_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_k)^{n_k}$ $(\lambda_i \in \mathbb{R}$：重複なし$)$,
$\mathrm{rank}(A - \lambda_i E) = n - n_i$ $(1 \leq i \leq k)$ $\cdots$ (1)
$\Rightarrow$ A は対角化可能．

注意

条件 (1) は固有空間 W_{λ_i} に独立パラメータが n_i 個あり固有ベクトルが独立に n_i 個取れることに対応している（教科書 p. 62 の $t_{r+1}, \cdots, t_n$ 参照）．

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有多項式 $f_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ -2 & t-2 & -2 \\ -3 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = t(t+1)(t-6)$.

A の固有値 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 6$.
$\mathrm{rank}(A - 0 \cdot E) = 2$, $\mathrm{rank}(A - (-1) \cdot E) = 2$, $\mathrm{rank}(A - 6 \cdot E) = 2$.
定理 5.2 より，A は対角化可能．（各自，確認する）

- 次に，$P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる P を選べる場合について考える

定義

$P^{\mathrm{T}}P = E_n$ となる正方行列 P を直交行列という． $\cdots$ $P^{\mathrm{T}} = P^{-1}$ となる

定義

A：$n \times n$ 行列．

A：直交対角化可能 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 直交行列 P で $P^{-1}AP$ を対角行列にできる．

(対角化可能) (正則行列 P)

注意

$P^{-1}AP = D$ (対角行列) とする． A は直交対角化可能とすると，

P：直交行列 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$

$\Rightarrow A = PDP^{\mathrm{T}}$

$\Rightarrow A^{\mathrm{T}} = PD^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} = PDP^{\mathrm{T}}$ $(\because D^{\mathrm{T}} = D)$

$\Rightarrow A^{\mathrm{T}} = A \Rightarrow A$ は対称行列． $\cdots$ 実は，逆も成り立つ

定理 5.3

A：正方行列.
A：直交対角化可能 $\Leftrightarrow$ A：対称行列.

定義

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathrm{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

x と y の内積 $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \ (= \mathrm{x}^{\mathrm{T}} \mathrm{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間という.
このときの座標を，正規直交座標という.

- この座標は原点 $\mathfrak{o}$ を通り，n 個のベクトル

$$\mathfrak{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathfrak{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^n$$

を座標軸に含む.

$\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ を $\mathbb{E}^n$ の標準基底という.

例

A, B：$n \times n$ 行列．$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \mathbb{x}^{\mathrm{T}} \mathbb{y}$ に注意する．
A の i 行の転置を $\mathbb{A}_i$, B の j 列を $\mathbb{b}_j$ とすれば，

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbb{A}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{b}_1 & \cdots & \mathbb{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbb{A}_1, \mathbb{b}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbb{A}_1, \mathbb{b}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbb{A}_n, \mathbb{b}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbb{A}_n, \mathbb{b}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

特に，$P^{\mathrm{T}} P = E_n$ のときを考えれば，

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{p}_1 & \cdots & \mathbb{p}_n \end{pmatrix} \text{が直交行列} \Leftrightarrow \langle \mathbb{p}_i, \mathbb{p}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

この δ_{ij} をクロネッカーのデルタという．

5.2　正規直交化法と直交対角化法

定理 5.4 (内積の性質)

$\mathbb{x}, \mathbb{y}, \mathbb{z} \in \mathbb{E}^n$, $c \in \mathbb{R}$.
(1) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle \geq 0$. $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbb{x} = \mathbb{o}$.
(2) $\langle \mathbb{x} + \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle + \langle \mathbb{y}, \mathbb{z} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} + \mathbb{z} \rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle + \langle \mathbb{x}, \mathbb{z} \rangle$.
(3) $\langle c\,\mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = c \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$, $\langle \mathbb{x}, c\,\mathbb{y} \rangle = c \langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle$.
(4) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y} \rangle = \langle \mathbb{y}, \mathbb{x} \rangle$.

定義

$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$.
$\mathbb{x}$ の大きさ $||\mathbb{x}|| := \sqrt{\langle \mathbb{x}, \mathbb{x} \rangle}$. (内積の定義から, $||\mathbb{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$)

例

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^2$ の大きさは, $||\mathbb{x}|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

