はじめに　(数学基礎 B2)

数学基礎 B　＝　**線形代数**

教科書　「要点明解 線形数学」培風館

(第１章　ベクトル)
(第２章　行列)
(第３章　連立１次方程式)
- 第４章　行列式
- **第５章　行列の対角化**

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと.
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

- x と y の内積 $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \ (= \mathrm{x}^{\mathrm{T}} \mathrm{y})$ が定義されているとき，$\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{E}^n$ と書き，n 次元ユークリッド空間といった．

定理 5.5 (コーシー・シュワルツの不等式)

$\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{E}^n$ に対して，$|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle| \leq ||\mathrm{x}|| \ ||\mathrm{y}||$.
等号成立 $\Leftrightarrow a\mathrm{x} + b\mathrm{y} = \mathrm{o}$ なる $a, b \in \mathbb{R}$ が存在．

- 定理 5.5 より，$-1 \leq \dfrac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle}{||\mathrm{x}|| \ ||\mathrm{y}||} \leq 1$.

定義 (ベクトルのなす角，直交)

$\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{E}^n \ (\mathrm{x}, \mathrm{y} \neq \mathrm{o})$.

$$\frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle}{||\mathrm{x}|| \ ||\mathrm{y}||} = \cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

なる θ がただ 1 つ存在し，x と y のなす角という．

$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = 0$ のとき，x と y は直交するという．(つまり，$\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$)

定義 (正射影，直交成分)

$\mathbb{v} \in \mathbb{E}^n$, 大きさ $||\mathbb{v}|| = 1$ とする.

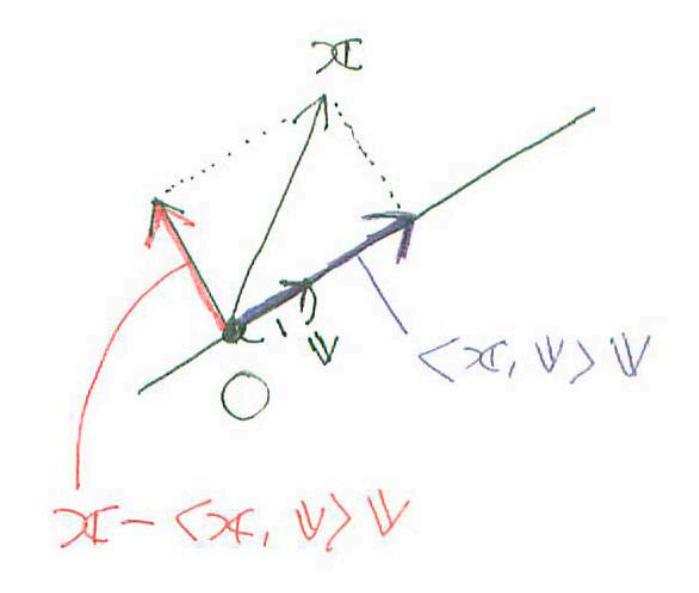
$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して,

$\langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle \mathbb{v}$ を$\mathbb{x}$ の $\mathbb{v}$ 方向への正射影, $\langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle$ を$\mathbb{v}$ 方向の成分,

$\mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v} \rangle \mathbb{v}$ を$\mathbb{x}$ の $\mathbb{v}$ に関する直交成分という.

注意

実際，次のようになる：



定理 5.6

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k \in \mathbb{E}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ は，大きさが 1，互いに直交しているとする．$\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，

$$\mathbb{x}' := \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \mathbb{v}_2 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k$$

は，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k$ と直交する．

$\because$ 例えば，$\mathbb{x}'$ と $\mathbb{v}_1$ が直交するのは，

$$\langle \mathbb{x}', \mathbb{v}_1 \rangle = \langle \mathbb{x} - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_1 \rangle$$
$$= \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \langle \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_1 \rangle - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \langle \mathbb{v}_k, \mathbb{v}_1 \rangle$$
$$= \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \cdot \quad 1 \quad - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_2 \rangle \cdot \quad 0 \quad - \cdots - \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_k \rangle \cdot \quad 0$$

$= 0$ のようにわかる．$(\because \langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_1 \rangle = ||\mathbb{v}_1||^2 = 1, \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_1 \rangle = 0 \ (i \neq 1))$

$\mathbb{x}'$ と $\mathbb{v}_2, \ldots, \mathbb{v}_k$ が直交することも同様にしてわかる．

定理 5.7 (グラム・シュミットの正規直交化法)

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{E}^n$.
行列 $Q = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ は正則を仮定する. $(|Q| \neq 0)$

$$\mathbb{p}_1 := \frac{\mathbb{v}_1}{||\mathbb{v}_1||}.$$

$i = 2, \ldots, n$ に対して, 順番に

$$\mathbb{p}_i := \frac{\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}}{||\mathbb{v}_i - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1 - \cdots - \langle \mathbb{v}_i, \mathbb{p}_{i-1} \rangle \mathbb{p}_{i-1}||}$$

とすれば, $P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ は直交行列.

注意

前回の例より,

$$P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n) \text{ は直交行列} \Leftrightarrow \langle \mathbb{p}_i, \mathbb{p}_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow ||\mathbb{p}_i|| = \sqrt{\langle \mathbb{p}_i, \mathbb{p}_i \rangle} = 1$ (正規という) かつ $\mathbb{p}_i$ と $\mathbb{p}_j$ $(i \neq j)$ は直交する.

命題

A：対称行列．$(A^{\mathrm{T}} = A)$
$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1,\ A\,\mathbb{p}_2 = \lambda_2\,\mathbb{p}_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2) \Rightarrow \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = 0.$
(異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する)

$\because\ \langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2 \rangle = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$ より，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = 0$ を示せばよい．
$A\,\mathbb{p}_1 = \lambda_1\,\mathbb{p}_1$ を転置して，$\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,A^{\mathrm{T}} = \lambda_1\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}$ より，

$$\lambda_1\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = (\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})\mathbb{p}_2 = (\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}A)\mathbb{p}_2 = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}(A\,\mathbb{p}_2) = \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2\,\mathbb{p}_2) = \lambda_2\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2$$

$$\Rightarrow\ (\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = 0$$

$$\Rightarrow\ \mathbb{p}_1^{\mathrm{T}}\,\mathbb{p}_2 = 0\ (\because\ \lambda_1 \neq \lambda_2).$$

注意

各固有値に対して，
グラム・シュミットの正規直交化法を適用すればよい．

- 固有多項式 $f_A(t)$ が重根をもつときが問題となる

例

対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を直交対角化せよ.

Step 1. A の固有多項式

$f_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -1 \\ -1 & t-3 & -1 \\ -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-5)(t-2)^2$ より,

A の固有値は $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ (2 重解).

Step 2. $\boxed{\lambda_1 = 5}$ に対する固有ベクトル $\mathbb{v}$ は, $(5E - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbb{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解, $\mathbb{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\boxed{\lambda_2 = 2}$ (2 重解) に対する固有ベクトル $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ は, $(2E - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbb{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解, $\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

例 (つづき)

Step 3. (各固有値に，グラム・シュミットの正規直交化法を適用)

$\mathbb{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，$\mathbb{q} := \dfrac{\mathbb{v}}{||\mathbb{v}||} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して，

$$\mathbb{p}_1 := \frac{\mathbb{v}_1}{||\mathbb{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{p}_2 := \frac{\mathbb{v}_2 - \langle \mathbb{v}_2, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1}{||\mathbb{v}_2 - \langle \mathbb{v}_2, \mathbb{p}_1 \rangle \mathbb{p}_1||} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

例 (つづき)

Step 4. $P = (\mathfrak{q}\ \mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とすれば,

P は直交行列であり，$P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ となる．(グラム・シュミットより)

このとき，$P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

A を直交対角化できた．実際,

$$AP = (A\,\mathfrak{q}\ \ A\,\mathfrak{p}_1\ \ A\,\mathfrak{p}_2) = (\lambda_1\,\mathfrak{q}\ \ \lambda_2\,\mathfrak{p}_1\ \ \lambda_2\,\mathfrak{p}_2) = (5\,\mathfrak{q}\ \ 2\,\mathfrak{p}_1\ \ 2\,\mathfrak{p}_2)$$

$$= (\mathfrak{q}\ \ \mathfrak{p}_1\ \ \mathfrak{p}_2)\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$