はじめに　(数学基礎 B2)

数学基礎 B　＝　**線形代数**

教科書　「要点明解 線形数学」培風館

(第１章　ベクトル)
(第２章　行列)
(第３章　連立１次方程式)
- 第４章　行列式
- **第５章　行列の対角化**

講義の情報　http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/teaching-j.html

シラバス　LINK

- ノートを取りながら講義を聴くこと.
  (ノートを回収して確認する可能性があります)
- 講義 $\longrightarrow$ 小テスト (理解度確認テスト，学務情報システム内)

5.3　基底と座標

定義 (基底，座標)

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であるとは，すべての $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ が
$\mathbb{a} = b_1\mathbb{v}_1 + \cdots + b_n\mathbb{v}_n$ $(b_i \in \mathbb{R})$ と一意的 (ただ 1 通り) に表せること．

このとき，$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ を基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ に関する $\mathbb{a}$ の座標という．

- 一意的 (ただ 1 通り) とは …

  $\mathbb{a} = b_1\mathbb{v}_1 + \cdots + b_n\mathbb{v}_n = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n \Rightarrow b_1 = c_1, \ldots, b_n = c_n.$

例

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^n$ の座標は正規直交座標とよばれ，

$\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbb{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^n$ を $\mathbb{E}^n$ の標準基底といった．

注意

基底の定義の式 $\mathbb{a} = b_1\mathbb{v}_1 + \cdots + b_n\mathbb{v}_n$ $(b_i \in \mathbb{R})$ は,

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \mathbb{v}_i = \begin{pmatrix} v_{1i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ (i = 1, \ldots, n) \text{ に対して,}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + b_n \begin{pmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

となる. よって,

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底 $\Leftrightarrow$ すべての $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ がただ一つの解 $\mathbb{x} = \mathbb{b}$ をもつ.

定理 5.8

$\mathbb{x}$: 標準基底 $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$ に関する座標,
$\mathbb{x}'$：基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ に関する座標
$\Rightarrow \mathbb{x} = P\,\mathbb{x}'$. 但し，$P = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ で $|P| \neq 0$. $(\Rightarrow \mathbb{x}' = P^{-1}\,\mathbb{x}$ となる)

定理 5.9

P：n 次正方行列.
P：正則 $\Leftrightarrow$ P の列ベクトル全体が $\mathbb{R}^n$ の基底.

定義 (正規直交基底)

大きさが 1 で互いに直交しているベクトルからなる基底を正規直交基底という.

例

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{E}^n$ を大きさが 1 で互いに直交しているとする．
前回の注意より，$A = (\mathbb{v}_1 \cdots \mathbb{v}_n)$ は直交行列 $(A^{\mathrm{T}}A = E)$ であり，
$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ は正規直交基底となる．実際，すべての $\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，
$\mathbb{x} = \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \mathbb{v}_1 + \cdots + \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_n \rangle \mathbb{v}_n$ と一意的に表せる．
$\because\ \mathbb{x} = k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n \Rightarrow k_i = \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_i \rangle\ (i = 1, \ldots, n)$ を示す．
$\langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_i \rangle = \langle k_1\mathbb{v}_1 + \cdots + k_n\mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1\langle \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_i\langle \mathbb{v}_i, \mathbb{v}_i \rangle + \cdots + k_n\langle \mathbb{v}_n, \mathbb{v}_i \rangle$
$= k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot 1 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_i.$
$(\because \langle \mathbb{v}_j, \mathbb{v}_i \rangle = 0\ (i \neq j),\ ||\mathbb{v}_i|| = 1)$

- (標準基底 $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n \in \mathbb{E}^n$ のかわりに)
  $\mathbb{x} \in \mathbb{E}^n$ に対して，正規直交基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ を用いて，
  正規直交座標 $\begin{pmatrix} \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbb{x}, \mathbb{v}_n \rangle \end{pmatrix}$ を導入できる．

定義 (線形写像，線形変換)

写像 $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathrm{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$

の各 $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ が $x_1, \ldots, x_n$ の同次 1 次式 (定数項なし) のとき，
$\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ を線形写像という．特に，$m = n$ のとき，線形変換という．

注意

線形写像 $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ は

$$\mathrm{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \text{ とかけるので,}$$

$$\mathrm{y} = A\,\mathrm{x},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

定理 5.10

$\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: 線形写像.
(1) $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\mathrm{f}(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{f}(\mathrm{y})$;
(2) $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathrm{f}(c\,\mathrm{x}) = c\,\mathrm{f}(\mathrm{x})$.
逆に, (1), (2) をみたす写像 $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は線形写像.

例

$\mathbb{y} = \mathbb{f}(\mathbb{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$：線形変換，$\mathbb{y} = A\,\mathbb{x}$, A：$n \times n$ 行列.
A の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (重複を許す) に対する，A の固有ベクトルを $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$ とする．さらに，$\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底を仮定する.

このとき，すべての $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ は
$\mathbb{x} = X_1\mathbb{p}_1 + \cdots + X_n\mathbb{p}_n$ $(X_i \in \mathbb{R})$　$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
と一意的に表せる．また，
$\mathbb{f}(\mathbb{x}) = \mathbb{f}(X_1\mathbb{p}_1 + \cdots + X_n\mathbb{p}_n) = A(X_1\mathbb{p}_1 + \cdots + X_n\mathbb{p}_n) =$
$AX_1\mathbb{p}_1 + \cdots + AX_n\mathbb{p}_n = (\lambda_1 X_1)\mathbb{p}_1 + \cdots + (\lambda_n X_n)\mathbb{p}_n$ $(\because\ A\mathbb{p}_i = \lambda_i\mathbb{p}_i)$
より，原点を通り，それぞれ $\mathbb{p}_1, \ldots, \mathbb{p}_n$ に平行な直線を座標軸にとれば，
この $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ 座標について，$\mathbb{f}(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\mathbb{X} = D\,\mathbb{X}$ と
なる．$\mathbb{x} = P\,\mathbb{X}$, $P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$ で，$A\,\mathbb{x} = \mathbb{f}(\mathbb{x}) = PD\,\mathbb{X} = PDP^{-1}\,\mathbb{x}$.
すなわち，$P^{-1}AP = D$.

- 固有ベクトルに平行な座標軸 $\mathbb{X}$ をとれば，$\mathbb{f}$ は簡潔な式になる！

- さらに … 実は，次が成り立つ：

定理

P：$n \times n$ 行列．次は同値：
(a) P は直交行列　$(P^{-1} = P^{\mathrm{T}})$;
(b) P の列ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底；
(c) すべての $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$||P\,\mathbb{x}|| = ||\mathbb{x}||$;
(d) すべての $\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle P\,\mathbb{x}, P\,\mathbb{y}\rangle = \langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle$.

- $\mathbb{x} = P\,\mathbb{X}$, $P = (\mathbb{p}_1 \cdots \mathbb{p}_n)$，$P$ は直交行列とすると，内積を変えない座標の変換，したがって，長さと角度を変えない座標の変換となる．
$\left(\because\ \dfrac{\langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle}{||\mathbb{x}||\,||\mathbb{y}||} = \cos\theta,\ ||\mathbb{x}|| = \sqrt{\langle \mathbb{x}, \mathbb{x}\rangle}\right)$
- 直交対角化 $P^{-1}AP = D$, $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ は内積 (長さと角度) を変えない座標の変換によって線形変換 $\mathbb{f}$ をあらわしたもの．
- 実は，第 2 章の最後の例 2.25 (p. 46) (2 次形式と楕円の回転の例) が直交対角化の例になっていた！

例 (前回の例のつづき)

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，A^n を求めよ．前回の例の Step 2 より，

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(いまは Step 3 の直交対角化は必要ない．対角化のみで OK．)

$$\therefore A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\therefore A^n = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

例 (前回の例のつづき)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{であるから,}$$

$$\therefore A^n = P \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n & 2^n & 2^n \\ 5^n & -2^n & 0 \\ 5^n & 0 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2\cdot 2^n & 5^n - 2\cdot 2^n + 2^n & 5^n + 2^n - 2\cdot 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2\cdot 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 5^n + 2\cdot 2^n \end{pmatrix}.$$